

Джозефсоновский контакт малой емкости в зашумленной среде

И.А. Князь*

Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина

(Получено 10.01.2018; в отредактированной форме – 25.04.2018; опубликовано online 29.04.2018)

В работе рассмотрена стохастическая модель джозефсоновского контакта малой емкости с двумя коррелирующими цветными шумами. В рамках аналитических и численных расчетов показана возможность появления нормальной компоненты тока за счет вариации интенсивности шума или его спектральных характеристик. Показано, что феномен возникновения диссипативного тока при малых значениях критического тока связан с корреляцией между тепловыми и внешними шумами. Найден критические значения параметров шума, при которых напряжение на контакте максимально.

Ключевые слова: Коррелирующие шумы, Джозефсоновский контакт, Цветные флуктуации, Направленная диффузия.

DOI: [10.21272/jnep.10\(2\).02037](https://doi.org/10.21272/jnep.10(2).02037)

PACS numbers: 74.50. + r, 05.40. – a

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время исследованиям джозефсоновских контактов уделяется пристальное внимание [1-4]. Уникальные свойства джозефсоновских переходов позволяют использовать их как в наномасштабных сверхпроводящих квантовых интерферометрах (для обнаружения изменений слабых магнитных потоков), так и в сверхпроводящих квантовых кубитах. На сегодняшний день актуальными остаются вопросы, связанные с электродинамикой джозефсоновских переходов в условиях низких и высоких температур. Сложности в решении таких задач обусловлены тем, что в экстремальных температурных режимах шум оказывает существенное влияние на работу джозефсоновских контактов. В результате зависимость сверхтока от электромагнитного поля приобретает нетривиальный и сильно нелинейный вид. Без учета шумовых составляющих невозможно объяснить ряд явлений в переходах: возникновение хаоса, “вторичные” квантовые эффекты, возбуждение и взаимодействие солитонов и т.п. [5].

Необходимо отметить, что шум в джозефсоновских контактах был обнаружен экспериментально. В работе [6] показано, что шумовые эффекты сильно влияют на вольт-амперные характеристики переходов. В работе [7] показано, что появление низкочастотного шума в высокотемпературных сверхпроводниках связано с флуктуациями температуры, магнитного поля и тока смещения. В работе [8] в условиях низких температур было изучено время когерентности шума слабого тока в джозефсоновских вихревых кубитах, формируемых на однородных джозефсоновских переходах. В работе [9] были получены нетривиальные экспериментальные результаты: индуцированная шумом резонансная активация джозефсоновского перехода.

Поскольку избавиться от влияния шума, как правило, проблематично, построение законченной “электродинамической” части теории сверхпроводимости требует аналитического описания широкого

спектра индуцированных флуктуациями явлений. В контексте данной проблемы можно выделить ряд работ, посвященных исследованию влияния шума на поведение слабосвязанных систем (точный контакт между сверхпроводниками, короткое сужение в поперечном сечении сверхпроводника или слой нормального металла, а не диэлектрика, как в туннельном переходе). В работе [10] показано, что в контактах с баллистической проводимостью (размер сужения меньше длины свободного пробега) интенсивность дробового шума стремится к нулю. В обзоре [11] приводится теоретическая оценка спектральной плотности шума в слабосвязанных сверхпроводниках, полученная в рамках метода микроконтактной спектроскопии. Показано, что в баллистическом режиме зависимость спектральной плотности от напряжения на контакте имеет немонотонный вид и представляет из себя чередование максимумов и минимумов, что связано с особенностями электрон-фононного взаимодействия в контакте.

В работах [12-14] описана динамика джозефсоновского контакта под воздействием дельта-коррелированных белых шумов. Было показано, что корреляция между белыми внешним и тепловым шумами является причиной возникновения ненулевого потока вероятности.

На сегодня остается открытым вопрос аналитического описания индуцированного шумом направленного транспорта зарядов в классе малоемкостных моделей джозефсоновских переходов с цветными коррелирующими шумами. В контексте данной проблемы интересной является задача уменьшения потерь энергии в контакте за счет вариации спектральных характеристик шума или его интенсивности. В данной работе акцент на цветных шумах делается не случайно – такие модели являются максимально приближенными к реальным системам [7]. Представленную работу можно рассматривать как дальнейшее развитие наших работ [15, 16] и работы [12], посвященных проблемам нарушения симметрии эффективного потенциала нелинейной системы под воздействием коррелирующих цветных шумов.

* knigorua1@gmail.com

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

2.1 Модель

Рассмотрим нестационарный эффект Джозефсона в рамках так называемой резистивной модели. Полный ток I через систему является суммой сверхпроводящего тока I_s и нормального тока $I_n = U/R$, где R – сопротивление контакта в нормальном состоянии. Если контакт находится в режиме заданного тока I , а напряжение подстраивается под него в соответствии со свойствами системы, то при $I < I_c$ (I_c – критический ток) через контакт протекает только ток I_s . В случае $I > I_c$, куперовские пары уже не могут обеспечить ток I , и в дополнение к току куперовских пар возникает нормальная компонента, а значит, и напряжение на контакте.

Математическую модель контакта в зашумленной среде построим на основе известной резистивной модели [5]. Как известно, макроскопической характеристикой контакта, которая содержит информацию о фазе сверхпроводящего конденсата, состоящего из огромного количества электронов, является разность значений $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ фаз параметра порядка в двух “берегах” контакта. Поскольку нас интересует “макроскопическая” динамика сверхпроводящего состояния перехода, построим стохастическое уравнение, описывающее эволюцию разности фаз φ во времени. При условии малой емкости контакта для разности фаз φ можно записать уравнение:

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin(\varphi) = I, \quad (1)$$

где \hbar , e – фундаментальные физические константы.

Разница фаз связана с напряжением на переходе следующим соотношением [5]:

$$U(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2)$$

Будем воздействовать на контакт шумом $\zeta(t)$, интенсивность σ_ζ которого является внешним управляющим параметром. Такое воздействие может быть связано со случайными изменениями электромагнитного поля, температуры, вибрациями и т.п. В результате, внутренняя структура контакта может измениться, что приведет к случайным изменениям критического тока $I_c + \zeta(t)$. Следуя [12], положим $I = \eta(t)$, где $\eta(t)$ – шум. В результате, уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + (I_c + \zeta(t)) \sin(\varphi) = \eta(t). \quad (3)$$

Положим, что флуктуационные слагаемые $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ скоррелированы и представляют собой цветной шум с нулевым средним и экспоненциально-спадающей корреляционной функцией. Адекватной моделью цветного шума с данными характеристиками является процесс Орнштейна-Уленбека. В этом случае корреляционные функции имеют вид

$$\langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = \frac{\sigma_\zeta^2}{\tau_\zeta} e^{-|t-t'|/\tau_\zeta}, \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \frac{\sigma_\eta^2}{\tau_\eta} e^{-|t-t'|/\tau_\eta},$$

где σ_μ – интенсивность соответствующего шума, τ_μ – время корреляции, $\mu = \{\zeta, \eta\}$. Отметим, что для перехода к белому шуму достаточно обнулить время корреляции, $\tau_\mu \rightarrow 0$, при этом корреляционные функции сводятся к дельта-функциям.

Естественно положить, что внешние воздействия скоррелированы с внутренним шумом. Связь между шумами отражается кросс-корреляционной функцией:

$$\langle \zeta(t) \eta(t') \rangle = \gamma \frac{\sigma_\zeta \sigma_\eta}{\tau_c} e^{-|t-t'|/\tau_c},$$

где γ – мера кросс-корреляционной связи, τ_c – время кросс-корреляции.

Для дальнейшего анализа перенормируем величины, входящие в уравнение (3), переписав его в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = -I'_c \sin(\varphi) - \sin(\varphi) \zeta'(t) + \eta'(t), \quad (4)$$

где $I'_c = 2eRI_c/\hbar$, $\zeta'(t) = 2eR\zeta(t)/\hbar$, $\eta'(t) = 2eR\eta(t)/\hbar$.

Полученное уравнение (4) представляет собой модель малоемкостного контакта в зашумленной среде. Для минимизации обозначений в дальнейшем изложении опустим штрихи.

2.2 Построение аналитической схемы

Построим аналитическую схему для анализа класса периодических систем типа (4). Перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi) + \sum_{\mu} g_{\mu}(\varphi) \zeta_{\mu}(t), \quad (5)$$

где $f(\varphi)$ – детерминистическая сила – периодическая функция с периодом L , $g_{\mu}(\varphi)$ – мультипликативная периодическая функция, связанная с источником цветных флуктуаций $\zeta_{\mu}(t)$. Дальнейший анализ проведем в рамках формализма, развитого в работах [15, 16] (детали в Приложении А). Введем в рассмотрение поток вероятности $J(\varphi, t)$ и запишем уравнение Фоккера-Планка в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\varphi, t) = -\frac{\partial}{\partial \varphi} J(\varphi, t), \quad (6)$$

где

$$J(\varphi, t) = D_1(\varphi)P(\varphi, t) - \frac{\partial}{\partial \varphi} D_2(\varphi)P(\varphi, t), \quad (7)$$

$$D_1(\varphi) = f + \sum_{n=0}^1 D_1^{(n)}(\varphi), \quad D_2(\varphi) = \sum_{n=0}^1 D_2^{(n)}(\varphi), \quad (8)$$

$$D_1^{(0)} = \sum_{\mu, \nu} M_{\mu\nu}^{(0)} g_{\mu} \frac{\partial g_{\nu}}{\partial \varphi}, \quad D_2^{(0)} = \sum_{\mu, \nu} M_{\mu\nu}^{(0)} g_{\mu} g_{\nu}, \quad (9)$$

$$D_1^{(1)} = \sum_{\mu, \nu} M_{\mu\nu}^{(1)} \frac{\partial g_{\nu}}{\partial \varphi} \left[f \frac{\partial g_{\mu}}{\partial \varphi} + g_{\mu} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right], \quad (10)$$

$$D_2^{(1)} = \sum_{\mu, \nu} M_{\mu\nu}^{(1)} g_{\nu} \left[f \frac{\partial g_{\mu}}{\partial \varphi} + g_{\mu} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right], \quad (11)$$

$$M_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \tau^n C_{\mu\nu}(t, t - \tau) d\tau. \quad (12)$$

В стационарном случае: $P(\varphi, t) \rightarrow P(\varphi)$. Соответственно, левая часть уравнения (6) обращается в нуль, откуда следует, что поток вероятности в пространстве состояний: $J(\varphi, t) \rightarrow J = \text{const}$.

Среднее стационарное значение для скорости изменения разности фаз в системе с симметричными периодическими потенциалом и периодической мультипликативной функцией связано с потоком простым соотношением:

$$\left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle_s = LJ. \quad (13)$$

Это выражение легко получить усредняя эффективное уравнение Ланжевена, которое можно сопоставить уравнению Фоккера-Планка (6) (детали в работе [17]).

Сравнивая выражения (2) и (13), можно увидеть что среднее напряжение на контакте пропорционально потоку вероятности. Периодичность функций, входящих в уравнение (5), дает возможность получить простое аналитическое выражение для расчета J . Перепишем выражение (7) в виде

$$J = -D_2(\varphi) e^{-U(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} e^{U(\varphi)} P(\varphi), \quad (14)$$

где эффективный потенциал имеет вид

$$U(\varphi) = \ln D_2(\varphi) - \int_0^\varphi D_1(x) / D_2(x) dx.$$

Интегрируя (14) на промежутке $[\varphi, \varphi + L]$, получим

$$J \int_\varphi^{\varphi+L} D_2^{-1}(x) e^{U(x)} dx = (e^{U(\varphi)} P(\varphi) - e^{U(\varphi+L)} P(\varphi+L)). \quad (15)$$

В силу периодичности граничных условий ($P(\varphi) = P(\varphi + L)$, $D_2(\varphi) = D_2(\varphi + L)$) выражение (15) можно представить в виде

$$J \int_\varphi^{\varphi+L} D_2^{-1}(x) e^{U(x)} dx = P(\varphi) e^{U(\varphi)} \left(1 - e^{-\int_0^L D_1(x) / D_2(x) dx} \right)$$

Выражая $P(\varphi)$ из последнего уравнения и интегрируя обе части уравнения на промежутке $[0, L]$ (с учетом условия нормировки $\int_0^L P(\varphi) d\varphi = 1$), имеем

$$J = \frac{1 - e^{-\int_0^L D_1(x) / D_2(x) dx}}{\int_0^L e^{-U(\varphi)} \int_\varphi^{\varphi+L} D_2^{-1}(x) e^{U(x)} dx d\varphi}.$$

Таким образом, для среднего напряжения на контакте можно записать

$$\langle U(t) \rangle = \frac{\hbar L \left(1 - e^{-\int_0^L D_1(x) / D_2(x) dx} \right)}{2e \int_0^L e^{-U(\varphi)} \int_\varphi^{\varphi+L} D_2^{-1}(x) e^{U(x)} dx d\varphi}. \quad (16)$$

2.3 Аналитические результаты

Для расчета напряжения на контакте воспользуемся формулой (16). Формулы (8)-(12) позволяют в явном виде получить вид дрейфовой и диффузионной составляющей для обезразмеренной модели (4) ($f(\varphi) = -\sin(\varphi)$, $g_1(\varphi) = -\sin(\varphi)$, $g_2(\varphi) = 1$, $\zeta_1(t) \equiv \zeta(t)$, $\zeta_2(t) \equiv \eta(t)$, $\hbar/2e = R = I_c = 1$):

$$D_1 = -\sin(\varphi) + \sigma_\zeta^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) (1 - 2\tau_\zeta \cos(\varphi)) - \gamma \sigma_\zeta \sigma_\eta \cos(\varphi) + \gamma \sigma_\zeta \sigma_\eta \tau_c \cos^2(\varphi), \quad (17)$$

$$D_2 = \sigma_\eta^2 (1 - \tau_\eta \cos(\varphi)) + \sigma_\zeta^2 \sin^2(\varphi) (1 - 2\tau_\zeta \cos(\varphi)) - \gamma \sigma_\zeta \sigma_\eta \sin(\varphi) (2 - 3\tau_c \cos(\varphi)).$$

Числитель в (16) будет отличен от нуля при условии

$$\int_0^L D_1(x) / D_2(x) dx \neq 0. \quad (18)$$

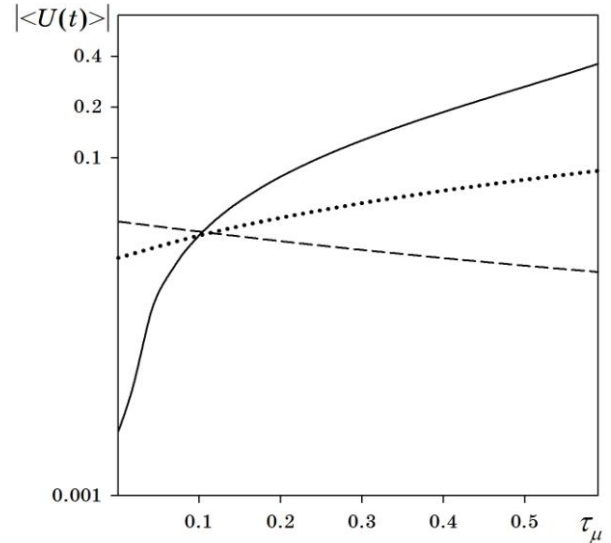


Рис. 1 – Зависимость среднего абсолютного значения напряжения на контакте $U \equiv \langle U(t) \rangle$ от времени авто- и кросс-корреляции τ_μ флуктуационных источников ($\mu = \{\zeta, \eta, c\}$) при $\gamma = 0.5$, $\sigma_\eta = 5.0$, $\sigma_\zeta = 2.0$. Сплошная кривая – зависимость $U(\tau_\eta)$ при $\tau_\zeta = 0.1$, $\tau_c = 0.1$. Точечная кривая – зависимость $U(\tau_\zeta)$ при $\tau_\eta = 0.1$, $\tau_c = 0.1$. Пунктирная кривая – зависимость $U(\tau_c)$ при $\tau_\eta = 0.1$, $\tau_\zeta = 0.1$

Поскольку интеграл от нечетной периодической функции на рассматриваемом промежутке $[0, 2\pi]$ будет равен нулю, то условие (18) будет выполняться только при $\gamma \neq 0$ (причиной появления ненулевых значений интеграла (18) является последнее слагаемое в (17)). Таким образом, кросс-корреляция между шумами является причиной возникновения напряжения на контакте. Отметим, что этот нетривиальный результат в граничном случае $\tau_c \rightarrow 0$ под-

тверждает результаты работ [12-14].

Качественная связь между напряжением на контакте и спектральным составом флуктуаций представлена на рис. 1. Исходя из полученных результатов, можно сделать несколько выводов: увеличение времени автокорреляции (переход к низкочастотным флуктуациям) как внутреннего так и нетемпературного шума ведет к росту напряжения (сплошная и точечная кривые на рис. 1); зависимость напряжения $U \equiv |\langle U(t) \rangle|$ от времени корреляции внешнего шума τ_ζ имеет практически линейный вид; увеличение времени корреляции аддитивного шума τ_η приводит к логарифмическому росту напряжения; увеличение времени кросс-корреляции τ_c приводит к обратному эффекту – снижению U на контакте.

Отметим, что представленная теоретическая схема построена для случая малых времен корреляции. Поэтому результаты для случая $\tau_\mu > 1$ являются сомнительными и мы их не приводим.

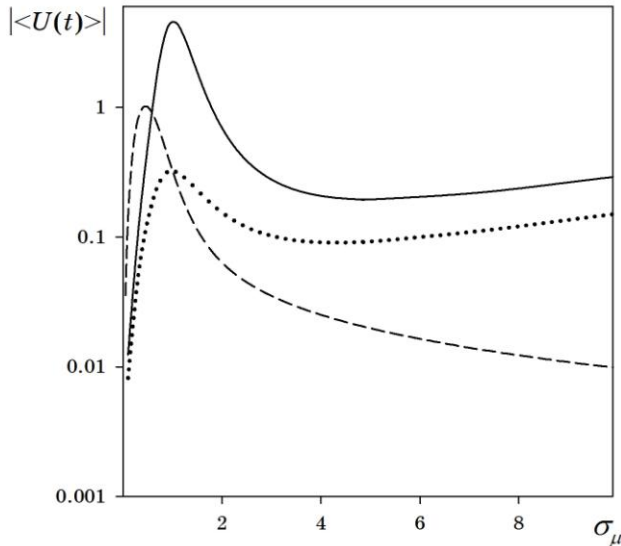


Рис. 2 – Зависимость среднего абсолютного значения напряжения на контакте $U \equiv |\langle U(t) \rangle|$ от интенсивности флуктуационных источников σ_μ ($\mu = \{\zeta, \eta\}$) при $\tau_\eta = 0.1$, $\tau_\zeta = 0.1$, $\tau_c = 0.1$. Сплошная кривая – зависимость $U(\sigma_\zeta)$ при $\gamma = 0.8$, $\sigma_\eta = 1.0$. Точечная кривая – зависимость $U(\sigma_\zeta)$ при $\gamma = 0.6$, $\sigma_\eta = 1.0$. Пунктирная кривая – зависимость $U(\sigma_\eta)$ при $\gamma = 0.6$, $\sigma_\zeta = 1.0$

Связь между напряжением и интенсивностью шума показана на рис. 2. Видно, что зависимость напряжения U от интенсивности как аддитивного так и мультипликативного шума имеет четко выраженный пик в области малых интенсивностей. Увеличение интенсивности внешнего шума σ_ζ выше критических значений приводит к уменьшению напряжения до определенных ненулевых значений U . Далее зависимость $U(\sigma_\zeta)$ демонстрирует тенденцию к незначительному росту напряжения. Таким образом на графике $U(\sigma_\zeta)$ имеется два экстремума. Зависимость $U(\sigma_\eta)$ имеет аналогичный вид при малых интенсивностях внутреннего шума σ_η . В области больших σ_η тенденция к увеличению $U(\sigma_\eta)$ не наблюдается. Это вполне естественно и связано с хаотизацией движения заряженных частиц.

Как видно из рис. 2 увеличение интенсивности кросс-корреляционного взаимодействия γ приводит к росту U (сплошная и точечная кривые на рис. 2).

2.4 Компьютерное моделирование

Полученные результаты качественно подтверждаются прямым компьютерным моделированием. Численное решение уравнения (4) проводилось методом Эйлера. Для генерации скоррелированных случайных процессов $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ использовался алгоритм, предложенный в работе [16]. Поток J определялся путем оценки в величины $d\varphi/dt$ с последующим усреднением по ансамблю реализаций при случайных начальных условиях $\varphi(t=0)$. Компьютерный эксперимент проводился при следующих параметрах: шаг по времени $\Delta t = 0.001$, временной интервал $t \in [0, 1000]$, количество экспериментов – 500. Переходной период времени $t \in [0, 100]$ был опущен. Усреднения проводилось на промежутке $t \in [100, 1000]$.

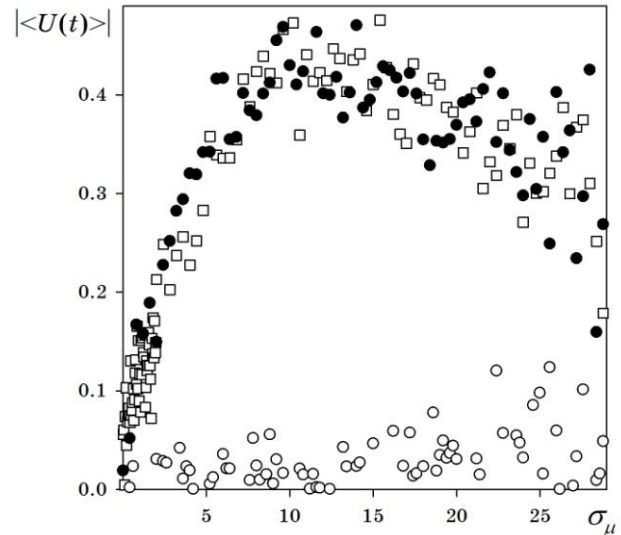


Рис. 3 – Результаты численного анализа уравнения (6) при $\tau_\eta = 0.1$, $\tau_\zeta = 0.1$, $\tau_c = 0.1$, $I_c = 1$. Кривая 1 (черные точки) – зависимость $U(\sigma_\zeta)$ при $\gamma = 0.8$, $\sigma_\eta = 10.0$. Кривая 2 (белые точки) – зависимость $U(\sigma_\zeta)$ при $\gamma = 0.0$, $\sigma_\eta = 10.0$. Кривая 3 (белые квадраты) – зависимость $U(\sigma_\eta)$ при $\gamma = 0.8$, $\sigma_\zeta = 10.0$

На рис. 3 приведены результаты компьютерного моделирования. Видно, что аналитические результаты качественно хорошо согласуются с результатами компьютерного эксперимента. В частности, подтверждается факт того, что наличие корреляционной связи между шумами является причиной появления напряжения на контакте (сравните кривые 1 и 2 на рис. 3). Подтверждается факт наличия максимума на зависимости напряжение–интенсивность шума. Разброс значений напряжения при больших интенсивностях шума можно минимизировать путем увеличения числа экспериментов, что требует значительных вычислительных ресурсов и не достижимо в рамках доступной нам вычислительной системы. В связи с этим, результаты расчетов при $\sigma_\mu > 30$ не приводятся. Несмотря на это, тенденция к уменьшению напряжения на контакте при увеличении интенсивности как внутреннего так и нетемпературно-

го шума хорошо видна.

На рис. 4 показана зависимость напряжения от времени корреляции шума. Численные результаты хорошо согласуются с результатами аналитических расчетов при $\tau_\mu < 1$. В частности, наблюдается увеличение напряжения при увеличении времени корреляции как аддитивного, так и мультипликативного шума. Результаты компьютерного эксперимента показывают, что существуют пиковые значения напряжения при определенных значениях времени автокорреляции τ_η , τ_ζ и кросс-корреляции τ_c . Рост времени корреляции приводит к нетривиальному эффекту: просматривается устойчивая тенденция снижения напряжения в сторону малых (не нулевых) значений U . Этот эффект, к сожалению, не может быть описан в рамках приведенной аналитической схемы.

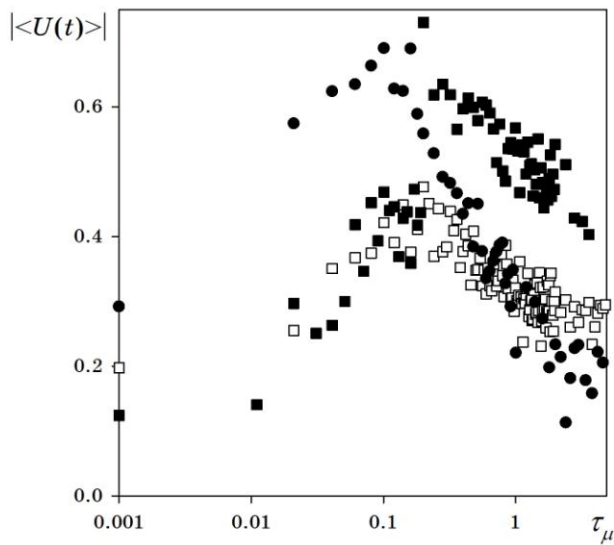


Рис. 4 – Результаты численного анализа уравнения (6) при $\gamma = 0.8$, $\sigma_\eta = 10.0$, $\sigma_\zeta = 10.0$, $I_c = 1$. Черные точки – зависимость $U(\tau_c)$ при $\tau_\zeta = 0.1$, $\tau_\eta = 0.1$. Черные квадраты – зависимость $U(\tau_c)$ при $\tau_\eta = 0.1$, $\tau_c = 0.1$. Белые квадраты – зависимость $U(\tau_\eta)$ при $\tau_c = 0.1$, $\tau_\zeta = 0.1$.

3. ВЫВОДЫ

В представленной работе в рамках аналитических и численных вычислений исследовано поведение джозефсоновского контакта малой емкости под воздействием двух коррелирующих цветных шумов: шумом управляющего параметра и внутренним тепловым шумом. Показано, что появление ненулевого напряжения на контакте при малом критическом токе может быть связано с кооперативным воздействием (корреляцией) цветных шумов – теплового и нетемпературного. Показано, что минимизация напряжения на контакте возможна при снижении уровня шума (что естественно, но не всегда возможно по техническим причинам), или, наоборот, за счет усиления хотя бы одного из шумов.

Показано, что спектральный состав флуктуаций является важным фактором: в рамках компьютерного эксперимента установлен факт существования критических (ненулевых) значений времени кросс- и автокорреляции, при которых напряжение на кон-

такте максимально. Показано, что переход к низкочастотным флуктуациям способствует значительному снижению напряжения. Это нетривиальный новый теоретический результат, который требует подтверждения в рамках физического эксперимента.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вывод уравнения Фоккера-Планка для системы с коррелирующими цветными шумами

Пусть $\rho(\varphi, t)$ – плотность распределения микроскопических состояний в фазовом пространстве. Для плотности распределения можно записать уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\varphi, t) = - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \rho(\varphi, t) \right). \quad (\text{A.1})$$

Подставляя (5) в (A.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\varphi, t) = - \left(L - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_\mu g_\mu \zeta_\mu \right) \rho(\varphi, t), \quad (\text{A.2})$$

где оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial \varphi} f. \quad (\text{A.3})$$

Используя представление

$$\wp(\varphi, t) = e^{L t} \rho(\varphi, t) \quad (\text{A.4})$$

и выполняя элементарные преобразования, перепишем (A.2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \wp = - e^{L t} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_\mu g_\mu \zeta_\mu e^{-L t} \rho = \sum_\mu R_\mu(\varphi, t) \wp, \quad (\text{A.5})$$

где оператор

$$R_\mu(\varphi, t) \equiv - \zeta_\mu \left(e^{L t} \frac{\partial}{\partial \varphi} g_\mu e^{-L t} \right).$$

Формальное решение уравнения (A.5) имеет вид

$$\wp = \exp \left(\hat{T} \int_0^t \hat{R}_\mu(\varphi, t') dt' \right),$$

где \hat{T} – оператор упорядочения по времени. Усредним полученный результат и воспользуемся методом разложения по кумулянтам [18]. При условии малости времен корреляции τ_μ стохастических составляющих можно разложить экспоненту в ряд и пренебречь слагаемыми высоких порядков [15, 16]. Далее выполним обратную процедуру – запишем соответствующее дифференциальное уравнение для $\langle \wp \rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \wp \rangle = \sum_{\mu, \nu} \int_0^t \langle R_\mu(\varphi, t) R_\nu(\varphi, t') \rangle \langle \wp \rangle dt' \quad (\text{A.6})$$

При условии $t \gg \tau_\mu$ можно положить $\langle \wp(\varphi, t') \rangle = \langle \wp(\varphi, t) \rangle$ и верхнюю границу интегрирования устремить в бесконечность.

По определению, функция распределения плотности вероятности

$$P(\varphi, t) = \langle \rho(\varphi, t) \rangle. \quad (\text{A.7})$$

Используя (A.4), (A.6) и (A.7), перейдем к распределению $P(\varphi, t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(L + \sum_{\mu, \nu} L_{\mu}^{(0)} \int_0^{\infty} C_{\mu\nu}(t, t-\tau) e^{L\tau} L_{\nu}^{(0)} e^{-L\tau} d\tau \right) P,$$

где

$$C_{\mu\nu}(t, t-\tau) = \langle \zeta_{\mu}(t) \zeta_{\nu}(t-\tau) \rangle, \quad L_{\mu}^{(0)} = \frac{\partial}{\partial \varphi} g_{\mu}(\varphi).$$

Раскладывая экспоненты в ряд по τ , перепишем последнее уравнение в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \left(-\frac{\partial}{\partial \varphi} f + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu, \nu} L_{\mu}^{(0)} M_{\mu\nu}^{(n)} L_{\nu}^{(n)} \right) P, \quad (\text{A.8})$$

где введены моменты корреляционной функции

$$M_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \tau^n C_{\mu\nu}(t, t-\tau) d\tau \quad (\text{A.9})$$

и оператор $L_{\nu}^{(n)}$, который определяется коммутатором

$$L_{\nu}^{(n)} = \left[L_{\nu}^{(n-1)}, L \right].$$

Ограничимся слагаемыми первого порядка. При $n = 1$, имеем

$$L_{\mu}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \varphi} g_{\mu} \frac{\partial}{\partial \varphi} f - \frac{\partial}{\partial \varphi} f \frac{\partial}{\partial \varphi} g_{\mu} \quad (\text{A.10})$$

Подставляя (A.10) в (A.8), приходим к уравнению (6).

Small Capacitance Josephson Junction in Noisy Environments

I.A. Knyaz'

Sumy State University, 2, Rimsky-Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine

A stochastic model of a low-capacity Josephson junction with two correlated color noises is considered. In the framework of analytical and numerical calculations, the possibility of the appearance of a normal current component due to variations in the noise intensity or its spectral characteristics is shown. It is shown that the phenomenon of the appearance of a dissipative current for small values of the critical current is associated with the correlation between thermal and external noise. Critical values of noise parameters at which the voltage on the contact has maximal values are found.

Keywords: Correlation noise, Josephson contact, Color fluctuations, Directed diffusion.

Джозефсонівський контакт малої ємності у флуктуючому середовищі

І.О. КНЯЗЬ

Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007 Суми, Україна

У роботі розглянута стохастична модель джозефсонівського контакту малої ємності з двома корельючими кольоровими шумами. У рамках аналітичних і чисельних досліджень показана можливість появи нормальної компоненти струму за рахунок варіації інтенсивності шуму або його спектральних характеристик. Показано, що феномен виникнення дисипативного струму при малих значеннях критичного струму пов'язаний з кореляцією між тепловими та зовнішніми шумами. Знайдені критичні значення параметрів шуму, при яких напруга на контакті є максимальною.

Ключові слова: Корельючі шуми, Джозефсонівський контакт, Кольорові флуктуації, Спрямована дифузія.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. V.V. Khotkevych, N.V. Khotkevych, S.V. Morlok, B.L. Konopatskyi, A.V. Khotkevych, *J. Phys.: Conference Series* **150**, 022036 (2009).
2. K.V. Kulikov, R. Davud, E.P. Nakhmedov, Yu.M. Shukrinov, *JETP* **152** No 2, 333 (2017).
3. F. Giazotto, T.T. Heikkila, F.S. Bergeret, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 067001 (2015).
4. C.T. Ke, I.V. Borzenets, A.W. Draelos, F. Amet, Y. Bomze, G. Jones, M. Craciun, S. Russo, M. Yamamoto, S. Tarucha, G. Finkelstein, *Nano Lett.* **16** No 8, 4788 (2016).
5. В.В. Шмидт, *Введение в физику сверхпроводников* (М.: МЦНМО: 2000) (V.V. Schmidt, *Vvedeniye v fiziku sverkhprovodnikov* (M.: MTSNMO: 2000)) [In Russian].
6. J.T. Peltonen, A.V. Timofeev, M. Meschke, J.P. Pekola, *J. Low Temp. Phys.* **146**, 135 (2006).
7. L. Hao, J.C. Macfarlane, *Physica C*: **292**, 315 (1997).

8. Ju H. Kim, R.P. Dhungana, K.S Park, *Phys. Rev. B* **73**, 214506 (2006).
9. G. Sun, N. Dong, G. Mao, J. Chen, W. Xu, Z. Ji, L. Kang, P. Wu, Y. Yu, D. Xing, *Phys. Rev. E* **75**, 021107 (2007).
10. И.О. Кулик, А.Н. Омелянчук, *ФНТ* **10**, 305 (1984) (I.O. Kulik, A.N. Omel'yanchuk, *FNT* **10**, 305 (1984)) [In Russian].
11. Yu.G. Naidyuk, I.K. Yanson, *Point-contact Spectroscopy* (Springer-Verlag: New York: 2005).
12. J. Li, *Phys. Rev. E* **76**, 031120 (2007).
13. C. Guarcello, D. Valenti, B. Spagnolo, V. Pierro, G. Filatrella, *Nanotechnology* **28**, 134001 (2017).
14. Q. Huang, C. Xue, J. Tang, *AIP Adv.* **6**, 015219 (2016).
15. D.O. Kharchenko, I.A. Knyaz', *Eur. Phys. J. B* **32**, 375 (2003).
16. I.A. Knyaz', *Eur. Phys. J. B* **83**, 235 (2011).
17. H. Risken, *The Fokker-Plank equation* (Springer-Verlag: Berlin: 1989).
18. N.G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland: Amsterdam: 1992).