

## Множественные взаимодействия волн в мультигармонических двухпотоковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах с винтовыми электронными пучками

А.В. Лысенко\*, Ю.Ю. Волк, Г.А. Алексеенко

Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина

(Получено 25.03.2018; в отредактированной форме – 27.04.2018; опубликовано online 29.04.2018)

Проведен анализ множественных взаимодействий волн в мультигармонических двухпотоковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах (ЛСЭ) Н-убитронного типа с винтовыми релятивистскими электронными пучками (РЭП) в приближении слабого сигнала. Рассмотрены случаи монохроматического и мультигармонического входных сигналов. Показано, что исследуемые мультигармонические ЛСЭ обладают более высокими темпами усиления по сравнению с двухпотоковыми супергетеродинными ЛСЭ, которые используют прямолинейные РЭП. Выяснено, что ширина частотного спектра электромагнитного сигнала, который формируется в мультигармонических двухпотоковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми РЭП, больше по сравнению с шириной частотного спектра в аналогичных ЛСЭ, использующих прямолинейные РЭП.

**Ключевые слова:** Двухпотоковые супергетеродинные лазеры на свободных электронах, Двухпотоковая неустойчивость, Винтовые электронные пучки, Множественные трёхволновые резонансы.

DOI: [10.21272/jnep.10\(2\).02014](https://doi.org/10.21272/jnep.10(2).02014)

PACS numbers: 41.60.Cr, 52.35. – g, 52.35.Mw

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, двухпотоковые супергетеродинные лазеры на свободных электронах (ДСЛСЭ) [1-21] обладают рядом уникальных свойств, которые делают такие устройства весьма перспективными для различных практических применений. Одним из основных достоинств ДСЛСЭ является их особая компактность и способность работать в режимах с чрезвычайно высоким уровнем усиления, возможность формировать мощный мультигармонический электромагнитный сигнал с широким частотным спектром [1, 17]. Это обеспечивается за счет эффекта супергетеродинного усиления электромагнитных волн в плазме релятивистских электронных пучков [1-21]. Идея этого эффекта состоит в том, чтобы использовать двухпотоковую неустойчивость для дополнительного усиления поперечной электромагнитной волны сигнала. Параметрический механизм взаимодействия, который является основным для традиционных лазеров на свободных электронах, здесь используется практически только для передачи энергии от продольных электронных волн к поперечному электромагнитному сигналу.

Следует отметить, что волны пространственного заряда (ВПЗ), которые усиливаются за счет двухпотоковой неустойчивости, характеризуются линейной дисперсионной зависимостью [1, 17, 22-24]. Благодаря этому свойству гармоника таких волн оказываются связанными друг с другом множеством трехволновых параметрических резонансов [1, 17, 22-23]. Это приводит к интенсивному возбуждению высших гармоник ВПЗ, которые к тому же усиливаются за счет двухпотоковой неустойчивости. Именно благодаря таким ВПЗ в ДСЛСЭ происходит формирование мощных мультигармонических электромагнитных волн с широким частотным спектром [1, 17].

Анализ динамики ВПЗ в винтовых двухскорост-

ных РЭП показал, что нарастание таких волн за счет двухпотоковой неустойчивости происходит с более высокими инкрементами, чем в прямолинейных РЭП [22, 23]. Было показано, что в винтовых пучках можно формировать мощные электромагнитные волны с большей шириной частотного спектра, темпы усиления волн оказываются более высокими. Следовательно, в мультигармонических двухпотоковых супергетеродинных ЛСЭ вместо прямолинейных предпочтительнее использовать винтовые РЭП. Однако, исследование формирования мультигармонических сигналов в ДСЛСЭ с винтовыми РЭП проведено не было. Представленная работа ликвидирует этот пробел, она посвящена исследованию *мультигармонических* процессов в двухпотоковых супергетеродинных ЛСЭ с *винтовыми* релятивистскими электронными пучками.

Отметим, что винтовые электронные пучки используются в двухскоростных супергетеродинных ЛСЭ достаточно давно [1, 18-21]. Однако мультигармонические свойства таких приборов, режимы, при которых формируется мощные электромагнитные волны с широким частотным спектром, изучены не были.

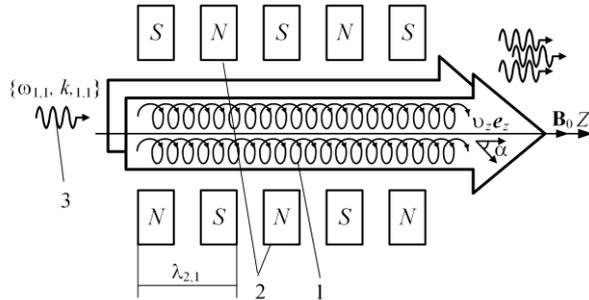
### 2. МОДЕЛЬ

Рассматриваем следующую модель мультигармонического ДСЛСЭ Н-убитронного типа с винтовыми электронными пучками. Вдоль оси  $Z$  прибора движется винтовая двухскоростная релятивистский электронный пучок 1 (рис. 1), который состоит из двух парциальных взаимно-проникающих винтовых электронных потоков с близкими по значению парциальными релятивистскими скоростями  $v_1, v_2$  ( $v_1 - v_2 \ll v_1, v_2$ ). Скорости электронов этих пучков направлены под углом  $\alpha$  по отношению к фокусирующему магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ . Плазменные частоты

\* [lysenko@ukr.net](mailto:lysenko@ukr.net)

ты парциальных электронных пучков принимаем одинаковыми  $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$ ; считаем, что пространственный заряд пучка скомпенсирован ионным фоном, в поперечной плоскости пучок является однородным, тепловым разбросом и столкновениями электронов пренебрегаем.

Винтовой двухскоростной релятивистский электронный пучок проходит через мультигармоническое циркулярно-поляризованное Н-убитронное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}_2$ , которое создается периодически реверсивной системой магнитов 2. Период ондуляции первой гармоники такого поля  $\lambda_{2,1}$ .



**Рис. 1** – Схема мультигармонического ДСЛСЭ Н-убитронного типа с винтовым двухскоростным электронным пучком. Здесь: 1 – винтовой двухскоростной релятивистский электронный пучок; 2 – система, которая создает мультигармоническое Н-убитронное магнитное поле накачки; 3 – входной электромагнитный сигнал

На вход ДСЛСЭ подается электромагнитный сигнал 3, первая гармоника которого имеет частоту  $\omega_{1,1}$ , волновое число  $k_{1,1}$ . Рассматриваем как случай монохроматического, так и мультигармонического входного электромагнитного сигнала 3. Вследствие трехволнового параметрического резонанса между, например, первой гармоникой волны сигнала и первой гармоникой волны накачки с волновым вектором  $k_{2,1} = 2\pi/\lambda_{2,1}$  происходит возбуждение первой гармоники волны пространственного заряда с частотой  $\omega_{3,1}$  и волновым числом  $k_{3,1}$ . В случае мультигармонического входного сигнала таким же образом возбуждаются и другие гармоники ВПЗ.

Параметры системы подбираем так, чтобы частота первой гармоники нарастающей волны пространственного заряда  $\omega_{3,1}$  была много меньше критической частоты двухпотоковой неустойчивости  $\omega_{cr}$  двухскоростного винтового РЭП. Поэтому первая гармоника ВПЗ будет нарастать из-за двухпотоковой неустойчивости. Особенностью волн пространственного заряда, которые нарастают благодаря двухпотоковой неустойчивости, является то, что такие волны характеризуются линейной дисперсионной зависимостью [1, 17, 22–24]. Вследствие этого между гармониками ВПЗ возникают множественные трехволновые параметрические резонансные взаимодействия [1, 17, 22–23]. Это приводит к интенсивному возбуждению и усилению высших гармоник ВПЗ. Возбужденные высшие гармоники ВПЗ также усиливаются и за счет двухпотоковой неустойчивости. Таким об-

разом, в рабочей области мультигармонического ДСЛСЭ происходит интенсивная генерация и усиление высших гармоник ВПЗ как за счет трехволновых множественных резонансных взаимодействий, так и за счет двухпотоковой неустойчивости. Следует отметить, что инкремент нарастания гармоник ВПЗ, обусловленный двухпотоковой неустойчивостью, будет увеличиваться с увеличением номера гармоники вплоть до оптимальной частоты, которая соответствует максимальному инкременту нарастания [1, 17, 22-23].

В рабочем объеме ДСЛСЭ реализовываются множественные трехволновые параметрические резонансные взаимодействия между гармониками волны пространственного заряда, гармониками магнитного поля накачки и гармониками электромагнитного поля сигнала. Благодаря таким трехволновым параметрическим резонансным взаимодействиям происходит преобразование энергии мультигармонической волны пространственного заряда в энергию мультигармонического электромагнитного сигнала. При этом для каждой  $m$ -й гармоники мультигармонической ВПЗ выполняется условие параметрического резонанса с соответствующими  $m$ -й гармоникой магнитного поля накачки и  $m$ -й гармоникой электромагнитного сигнала. Отметим, что в исследуемой системе также имеют место трехволновые резонансные взаимодействия между гармониками электромагнитного сигнала. В результате таких множественных взаимодействий на выходе мультигармонического ДСЛСЭ формируется мощная мультигармоническая электромагнитная волна. Изменяя параметры системы, например параметры мультигармонического поля накачки, можем управлять спектром мультигармонического электромагнитного сигнала, в том числе, создавать ультракороткий кластер электромагнитного поля [1, 17].

Так как все волны являются мультигармоническими, то напряженность  $\mathbf{E}_1$  и индукция  $\mathbf{B}_1$  электромагнитной волны сигнала, индукция поля накачки  $\mathbf{B}_2$ , напряженность электрического поля нарастающей продольной волны ВПЗ  $\mathbf{E}_3$  представим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \sum_{m=1}^N [(E_{1x,m} \mathbf{e}_x + E_{1y,m} \mathbf{e}_y) \exp(ip_{1,m}) + c.c.], \\ \mathbf{B}_1 &= \sum_{m=1}^N [(B_{1y,m} \mathbf{e}_y + B_{1x,m} \mathbf{e}_x) \exp(ip_{1,m}) + c.c.], \\ \mathbf{B}_2 &= \sum_{m=1}^N [(B_{2y,m} \mathbf{e}_y + B_{2x,m} \mathbf{e}_x) \exp(ip_{2,m}) + c.c.], \\ \mathbf{E}_3 &= \sum_{m=1}^N [E_{3z,m} \mathbf{e}_z \exp(ip_{3,m}) + c.c.]. \end{aligned} \quad (1)$$

В этих соотношениях  $E_{1x,m}, E_{1y,m}, E_{3z,m}, B_{1x,m}, B_{1y,m}, B_{2x,m}, B_{2y,m}$  – соответствующие проекции амплитуд  $m$ -х гармоник полей,  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  – орты соответствующих осей;

$$p_{\chi,m} = \omega_{\chi,m} \cdot t - k_{\chi,m} \cdot z = m\omega_{\chi,1} \cdot t - k_{\chi,m} \cdot z \quad (2)$$

– их фазы (индекс  $\chi$  принимает значения 1, 2 и 3);

$\omega_{\chi,m} = m\omega_{\chi,1}$  – их частоты ( $\omega_{2,1} = 0$ ) и  $k_{\chi,m}$  – волновые числа. Таким образом, электрическое и магнитное поля в исследуемом ДСЛСЭ имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \quad (3)$$

### 3. МНОЖЕСТВЕННЫЕ ТРЕХВОЛНОВЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ

В рассматриваемом мультигармоническом ДСЛСЭ с двухскоростным винтовым электронным пучком, как было сказано выше, реализуются три группы множественных трехволновых параметрических резонансных взаимодействий. Во-первых, это множественные параметрические резонансы между гармониками волны пространственного заряда в винтовом двухпотоковом электронном пучке [1, 17, 22-23]. Во-вторых, это множественные трехволновые взаимодействия между мультигармоническими полями электромагнитной волны, магнитного поля накачки и волны пространственного заряда. В-третьих, между гармониками электромагнитной волны сигнала. Рассмотрим эти взаимодействия более детально.

Как известно, нарастающая ВПЗ в винтовом двухскоростном электронном пучке характеризуется линейной дисперсионной зависимостью [1, 17, 22-24]:

$$\text{Re}(k_{3,m}) = \omega_{3,m} / v_{0z}, \quad (4)$$

где  $v_{0z} = (v_{1z} + v_{2z})/2$  – проекция на ось  $Z$  средней скорости двух парциальных электронных пучков. Благодаря такой дисперсионной зависимости для любой  $m$ -ой гармоники волны ВПЗ частота  $\omega_{3,m}$  и волновое число  $\text{Re}(k_{3,m})$  связаны с частотой  $\omega_{3,1}$  и волновым числом  $k_{3,1}$  первой гармоники соотношением:

$$\omega_{3,m} = m \cdot \omega_{3,1}, \quad \text{Re}(k_{3,m}) = m \cdot \text{Re}(k_{3,1}). \quad (5)$$

Для того чтобы имело место трехволновое параметрическое взаимодействие между  $m_1$ -й,  $m_2$ -й и  $m_3$ -й гармониками мультигармонической волны пространственного заряда, необходимо, чтобы для них выполнялось условие

$$P_{3,m1} = P_{3,m2} + P_{3,m3}, \quad \text{или} \\ \omega_{3,m1} = \omega_{3,m2} + \omega_{3,m3}, \quad \text{Re}(k_{3,m1}) = \text{Re}(k_{3,m2}) + \text{Re}(k_{3,m3}). \quad (6)$$

Используя (5) легко убедиться: чтобы условия (6) были выполненными, номера гармоник  $m$  должны удовлетворять соотношению:

$$m_1 = m_2 + m_3. \quad (7)$$

Этому условию удовлетворяют множество гармоник. Например, 3-я гармоника участвует во множестве резонансных взаимодействий:  $3 = 1 + 2$ ,  $3 = 4 - 2$  и так далее.

Как правило, с повышением частоты интенсивность параметрического взаимодействия уменьшается [1, 25]. Отметим, нарастающая ВПЗ усиливается также и за счет механизма двухпотоковой неустой-

чивости, которая имеет диапазон частот (от частоты первой гармоники до оптимальной частоты), в котором инкремент нарастания двухпотоковой неустойчивости увеличивается с увеличением частоты [1, 17, 22-23]. Таким образом, если частота первой гармоники ВПЗ много меньше оптимальной частоты, то в двухпотоковом электронном пучке за счет множественных трехволновых резонансных взаимодействий генерируются высшие гармоники, а за счет двухпотоковой неустойчивости эти гармоники усиливаются. В итоге формируется мультигармоническая ВПЗ, у которой гармоники имеют аномальный спектр, то есть более высокие гармоники имеют большие амплитуды.

Вторая группа множественных резонансных взаимодействий связана с параметрическими резонансами между гармониками электромагнитной волны сигнала. Для этой волны в случае, когда ее частота превышает плазменную частоту пучка, связь между волновым числом и частотой также можно считать квазилинейной

$$\omega_{1,m} = m \cdot \omega_{1,1}, \quad k_{1,m} \approx \omega_{1,m} / c = m\omega_{1,1} / c. \quad (8)$$

Видим, что соотношение (8) по своей структуре подобно соотношению (5). Это значит, что для гармоник электромагнитной волны сигнала, как и для гармоник ВПЗ, имеют место множественные трехволновые параметрические резонансные взаимодействия. Условия таких взаимодействий между  $m_1$ -й,  $m_2$ -й и  $m_3$ -й гармониками электромагнитного сигнала определяются тем же соотношением, что и для ВПЗ, а именно (7). В отличие от ВПЗ для электромагнитной волны сигнала отсутствует дополнительный механизм усиления. Поэтому амплитуды высших гармоник, которые генерируются за счет таких множественных трехволновых параметрических взаимодействий, с повышением частоты достаточно быстро уменьшаются.

Третья группа множественных резонансных взаимодействий связана с трехволновыми параметрическими взаимодействиями между гармониками электромагнитной волны сигнала, накачки и ВПЗ. Для волнового числа мультигармонического магнитного поля накачки  $k_{2,m} = mk_{2,1}$  также имеет место линейная зависимость от номера гармоники ( $\omega_{2,1} = 0$ ). Поэтому в исследуемой системе для каждой тройки  $m$ -х гармоник сигнала, накачки и нарастающей ВПЗ имеет место трехволновой резонанс, условия которых имеют вид

$$\omega_{3,m} = \omega_{1,m}, \quad k_{3,m} = k_{1,m} + k_{2,m}. \quad (9)$$

Условия (9) являются условиями множественных параметрических резонансных взаимодействий между гармониками волн сигнала, накачки и ВПЗ.

Таким образом, в рабочем объеме мультигармонического ДСЛСЭ реализуются три вида множественных трехволновых параметрических резонансных взаимодействия, которые необходимо учитывать при построении теоретической модели мультигармонического ДСЛСЭ Н-убитронного типа с винтовыми электронными пучками.

#### 4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В качестве исходных уравнений используем квазигидродинамическое уравнение, уравнение непрерывности и уравнения Максвелла [1, 17, 24–25]. Задачу движения решаем с помощью метода усредненных характеристик [1], задачу возбуждения электромагнитных полей – с помощью метода медленно меняющихся амплитуд. Также, учитываем, что при ненулевом угле влета электронов пучка  $\alpha$  относительно продольного фокусирующего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , электроны пучка в невозмущенном состоянии движутся по окружностям в поперечной плоскости. Поэтому в уравнениях движения используем замену:

$$v_{qx} = \bar{v}_{q\perp} \cos p_{q0} + \tilde{v}_{qx}, \quad v_{qy} = \bar{v}_{q\perp} \sin p_{q0} + \tilde{v}_{qy}, \quad (10)$$

где  $\bar{v}_{q\perp}$ ,  $p_{q0}$  – невозмущенная перпендикулярная составляющая вектора скорости и фаза вращения электронов  $q$ -го пучка в продольном магнитном поле;  $\tilde{v}_{qx}$ ,  $\tilde{v}_{qy}$  – осцилляторные  $x$ - и  $y$ -компоненты вектора скорости электронов  $q$ -го пучка.

В итоге получаем в слабосигнальном приближении систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд гармоник напряженности электрического поля электромагнитного сигнала и волны пространственного заряда в приближении слабого сигнала:

$$\begin{aligned} K_{1,m} \frac{dE_{1x,m}}{dz} &= K_{3,m} E_{3z,m} B_{2y,m}^* + \\ &+ K_{4,m} \left\langle E_1 \cdot \sum_{m'=1}^N [E_{1x,m'} \exp(ip_{1,m'}) / (im') + c.c.] \right\rangle_{P_{1m}}, \\ C_{2,m} \frac{d^2 E_{3z,m}}{dz^2} + C_{1,m} \frac{dE_{3z,m}}{dz} + D_{3,m} E_{3z,m} &= \\ &= C_{3,m} (1 + \eta_{1,m} \eta_{2,m}) E_{1x,m} B_{2y,m} + \\ &+ C_{4,m} \left\langle E_3 \cdot \sum_{m'=1}^N [E_{3z,m'} \exp(ip_{3,m'}) / (im') + c.c.] \right\rangle_{P_{3m}}. \end{aligned} \quad (11)$$

В этих уравнениях:

$$D_{3,m}(\omega_{3,m}, k_{3,m}) = -ik_{3,m} \left( 1 - \sum_{q=1}^2 \frac{\omega_p^2 (1 - (\bar{v}_{qz}/c)^2)}{\Omega_{3,m}^2 \bar{\gamma}_q} \right) \quad (12)$$

– дисперсионная функция продольной волны ВПЗ;  $K_{1,m} = \partial D_{1,m} / \partial(-ik_{1,m})$ ;  $C_{1,m} = \partial D_{3,m} / \partial(-ik_{3,m})$ ;  $C_2 = 0,5 \cdot \partial^2 D_{3,m} / \partial(-ik_{3,m})^2$ ;  $K_{3,m}$ ,  $K_{4,m}$ ,  $C_{3,m}$ ,  $C_{4,m}$  – коэффициенты соответствующих дифференциальных уравнений, которые зависят от частот, волновых чисел и параметров системы;

$$\begin{aligned} D_{1,m}(\omega_{1,m}, k_{1,m}) &= k_{1,m}^2 - \frac{\omega_{1,m}^2}{c^2} + \sum_{q=1}^2 \left[ \frac{\omega_p^2}{\bar{\gamma}_q (\Omega_{1,q,m} - \eta_{1,m} \Omega_{q0})^2} c^2 \times \right. \\ &\times \left. \left( \Omega_{1,q,m} (\Omega_{1,q,m} - \eta_{1,m} \Omega_{q0}) - \frac{\bar{v}_{q\perp}^2}{2c^2} (\omega_{1,m}^2 - k_{1,m}^2 c^2) \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

– дисперсионная функция электромагнитной волны

сигнала;

$$\eta_{1,m} = E_{1y,m} / (iE_{1x,m}) = \pm 1, \quad \eta_{2,m} = B_{2y,m} / (iB_{2x,m}) = \pm 1 \quad (14)$$

– знаковые функции ( $\eta_{1,m}$  – характеризует направление вращения напряженности электрического поля волны сигнала в продольном фокусирующем магнитном поле;  $\eta_{2,m}$  – характеризует направление вращения спирального магнитного поля ондулятора);  $\Omega_{0,q} = -\omega_{H,q} / \gamma_q$ ;  $\omega_{H,q} = e_q B_0 / (m_e c)$ ;  $\Omega_{2,q,m} = -k_{2,m} \bar{v}_{qz}$ ;  $\Omega_{1,q,m} = \omega_{1,m} - k_{1,m} \bar{v}_{qz}$ ;  $\Omega_{3,q,m} = \omega_{3,m} - k_{3,m} \bar{v}_{qz}$ ;  $\bar{v}_{qz}$  – постоянная составляющая  $z$ -компоненты скорости  $q$ -го пучка;  $\bar{\gamma}_q = 1 / \sqrt{1 - (\bar{v}_{q\perp}^2 + \bar{v}_{qz}^2) / c^2}$  – релятивистский фактор;  $c$  – скорость света.

Следует отметить, что для исследуемой системы собственными являются циркулярно-поляризованные электромагнитные волны, связь между амплитудами которых имеет вид (14). Уравнения для  $y$ -компонент электромагнитных полей подобны уравнениям для  $x$ -компонент полей, и поэтому мы их не записываем в (11). Коэффициенты  $K_{3,m}$ ,  $C_{3,m}$  характеризуют параметрически-резонансное взаимодействие электромагнитной волны сигнала, накачки и ВПЗ в квадратичном приближении. Из анализа правой части второго уравнения системы (11) ( $C_{3,m} (1 + \eta_{1,m} \eta_{2,m}) E_{1x,m} B_{2y,m}$ ) следует, что для реализации такого параметрического резонанса необходимо, чтобы электромагнитные волны сигнала и накачки имели одинаковое направление вращения вектора напряженности электрического поля. То есть вращение вектора напряженности электрического поля обеих волн должно быть направлено или по часовой стрелке ( $\eta_1 = +1$ ,  $\eta_2 = +1$ ), если смотреть вдоль вектора напряженности магнитного поля, или против часовой стрелки ( $\eta_1 = -1$ ,  $\eta_2 = -1$ ). В противном случае это слагаемое будет равным нулю.

В исследуемом ДСЛСЭ в качестве дополнительного механизма усиления используется двухпотоковая неустойчивость. С математической точки зрения это значит, что дисперсионное уравнение для волны пространственного заряда  $D_{3,m}(\omega_{3,m}, k_{3,m}) = 0$  имеет комплексные корни. Поэтому при подстановке в (12) действительных частот и действительных волновых чисел, дисперсионная функция не будет равна нулю  $D_{3,m} \neq 0$ . Именно этим обстоятельством обусловлено слагаемое  $D_{3,m} E_{3z,m}$  в уравнении для амплитуд волны пространственного заряда системы (11). Мы можем определить инкремент нарастания ВПЗ, который обусловлен двухпотоковой неустойчивостью, используя второе уравнение системы (11). Пренебрегая параметрическими резонансами, то есть, принимая правую часть этого уравнения равной нулю, получаем

$$C_{2,m} \frac{d^2 E_{3z,m}}{dz^2} + C_{1,m} \frac{dE_{3z,m}}{dz} + D_{3,m} E_{3z,m} = 0. \quad (15)$$

Ищем решение уравнения (15) в виде  $\sim \exp(\Gamma_{3,m}z)$  и получаем  $C_{2,m}\Gamma_{3,m}^2 + C_{1,\alpha,m}\Gamma_{3,m} + D_{3,m} = 0$ . Отсюда

$$\Gamma_{3,m} = \frac{-C_{1,m} \pm \sqrt{(C_{1,m})^2 - 4C_{2,m}D_{3,m}}}{2C_{2,m}} \approx \pm \sqrt{\frac{D_{3,m}}{C_{2,m}}}, \quad (16)$$

где  $\Gamma_{3,m}$  имеет смысл инкремента нарастания двухпотоковой неустойчивости. При получении (16) использовали, что для достаточно широкого диапазона значений параметров ДСЛСЭ  $|C_{1,\alpha,m}\Gamma_{3,m}| \ll |C_{2,m}\Gamma_{3,m}^2|, |D_{3,m}|$ . Из полученного соотношения (16) следует, что в системе (11) обязательно необходимо учитывать как слагаемое  $D_{3,m}E_{3z,m}$ , так и  $C_{2,m} \cdot d^2E_{3z,m}/dz^2$ , которые описывают динамику двухпотоковой неустойчивости.

### 5. АНАЛИЗ

Проведем анализ динамики волн в ДСЛСЭ с винтовыми двухскоростными пучками в слабосигнальном приближении. Исследуем устройство со следующими параметрами:  $\gamma_1 = 4.8, \gamma_2 = 4.2$ ; плазменная частота каждого из электронных пучков  $\omega_p = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ; период ондуляции магнитного поля накачки для первой гармоники 5 см, индукция фокусирующего продольного магнитного поля  $B_0 = 2.8 \cdot 10^2 \text{ Гс}$ .

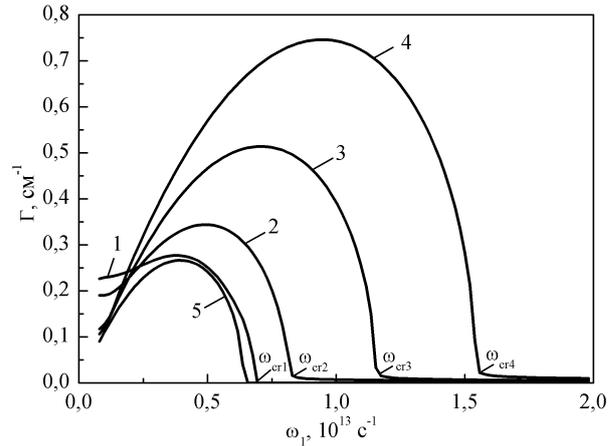
Определим инкременты нарастания волн в исследуемой системе. Для этого используем систему уравнений (11), в которой пренебрежем множественными резонансными взаимодействиями как между гармониками электромагнитной волны, так и между гармониками волны пространственного заряда. Тогда система (11) примет вид

$$\begin{aligned} K_1 \frac{dE_{1x}}{dz} &= K_3 E_{3z} B_{2x}^*, \\ C_2 \frac{d^2 E_{3z}}{dz^2} + C_1 \frac{dE_{3z}}{dz} + DE_{3z} &= \\ &= C_3 (1 + \eta_1 \eta_2) E_{1x} B_{2y}. \end{aligned} \quad (17)$$

В уравнении (17) индекс  $m$  опущен. Ищем решение этой системы уравнений в виде  $E_1, E_3 \sim \exp(\Gamma z)$ , где  $\Gamma$  – инкремент нарастания волн в ДСЛСЭ. Подстановка такого решения в (17) приводит к алгебраическому уравнению третьей степени относительно  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} K_1 \Gamma (C_2 \Gamma^2 + C_1 \Gamma + D) &= \\ = C_3 K_3 (1 + \eta_1 \eta_2) |B_{2y}|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Решая это уравнение численно, определим зависимость инкремента нарастания волн  $\text{Re}(\Gamma)$  в исследуемом устройстве как функцию частоты сигнала  $\omega_1$  для винтовых электронных пучков с различными углами влета пучка  $\alpha$ .



**Рис. 2** – Зависимости инкрементов нарастания от частоты волны сигнала  $\omega_1$  при различных углах влета  $\alpha$ . Кривые 1-4 соответствуют зависимостям инкрементов нарастания электромагнитных волн от частоты  $\omega_1$ , которые определены из соотношения (18): кривая 1 соответствует углу влета  $\alpha = 0^\circ$ , кривая 2 – углу  $\alpha = 10^\circ$ , кривая 3 –  $\alpha = 20^\circ$ , кривая 4 –  $\alpha = 30^\circ$ . Кривая 5 описывает зависимость инкремента нарастания двухпотоковой неустойчивости от частоты, которая определена из дисперсионного соотношения (12) для угла влета  $\alpha = 0^\circ$

На рис. 2 представлены зависимости инкрементов нарастания в исследуемом ДСЛСЭ от частоты волны сигнала  $\omega_1$  при различных углах влета  $\alpha$ . Кривые 1-4 соответствуют зависимостям инкрементов нарастания электромагнитных волн, которые определены из соотношения (18): кривая 1 соответствует углу влета  $\alpha = 0^\circ$ , кривая 2 – углу  $\alpha = 10^\circ$ , кривая 3 –  $\alpha = 20^\circ$ , кривая 4 –  $\alpha = 30^\circ$ . Кривая 5 описывает зависимость инкремента нарастания двухпотоковой неустойчивости от частоты, которая определена из дисперсионного соотношения (12) для угла влета  $\alpha = 0^\circ$ . Амплитуда поля накачки  $\sqrt{B_{2y}^2 + B_{2x}^2} = 565 \text{ Гс}$ .

Сравним зависимости инкремента нарастания электромагнитной волны сигнала (кривая 1) и инкремента нарастания двухпотоковой неустойчивости (кривая 5) от частоты при угле влета  $\alpha = 0^\circ$ . Видим, что, в целом, кривые 1 и 5 близки. Это свидетельствует о том, что именно двухпотоковая неустойчивость определяет динамику электромагнитной волны в исследуемом лазере на свободных электронах. Однако, при низких частотах ( $\omega_1 \sim 1 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ) различие между этими кривыми становится существенным. Это связано с тем, что темп нарастания электромагнитной волны сигнала в ДСЛСЭ определяется не только двухпотоковой, но и параметрической неустойчивостью. Известно, что при уменьшении частоты инкремент двухпотоковой неустойчивости уменьшается, тогда как инкремент параметрической неустойчивости увеличивается [1, 25]. По этой причине при низких частотах результирующий инкремент нарастания электромагнитной волны сигнала (кривая 1) становится существенно выше двухпотокового инкремента нарастания (кривая 5). Таким образом, при достаточно низких частотах результи-

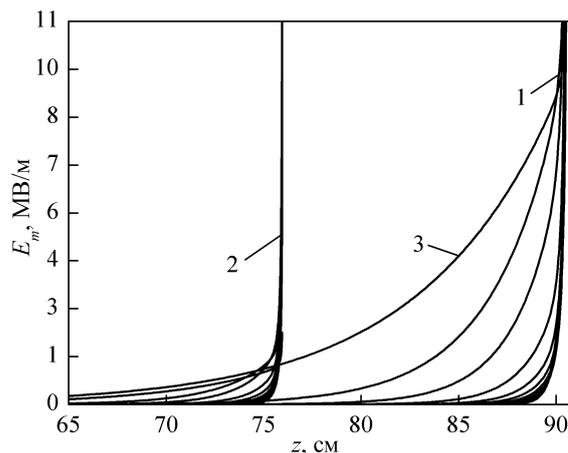
рующей инкремент нарастания электромагнитной волны сигнала определяется параметрической неустойчивостью.

С увеличением угла влета пучка  $\alpha$  различие между инкрементами нарастания электромагнитной волны сигнала и инкрементом нарастания двухпотоковой неустойчивости при низких частотах уменьшается. Причина этого состоит в том, что при увеличении угла влета  $\alpha$ , с одной стороны, инкремент двухпотоковой неустойчивости увеличивается, а с другой стороны, параметрический инкремент нарастания уменьшается.

Проведем анализ зависимостей инкрементов нарастания электромагнитной волны сигнала (кривые 1-4 на рис. 2) для углов влета  $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$  и  $30^\circ$ . Как уже упоминалось выше, эти зависимости, в целом, определяются инкрементами двухпотоковой неустойчивости, а значит, и обладают их свойствами. Видим, что с увеличением угла влета пучка  $\alpha$  увеличиваются как максимальные значения инкрементов нарастания электромагнитной волны сигнала  $\text{Re}(\Gamma)$ , так и критические частоты  $\omega_{cr}$ , при которых инкремент нарастания резко меняет динамику и становится близким к нулю. Такими же свойствами характеризуется двухпотоковая неустойчивость в винтовых двухскоростных релятивистских пучках [22, 23]. Таким образом, в мультигармонических двухпотоковых супергетеродинных ЛСЭ, которые используют винтовые двухскоростные релятивистские электронные пучки, темпы нарастания электромагнитных волн будут намного выше, чем в ДСЛСЭ с прямолинейными электронными пучками. Ширина спектра мультигармонического сигнала определяется разностью между критической частотой и частотой первой гармоники. Так как критическая частота с повышением угла влета растет ( $\omega_{cr1} < \omega_{cr2} < \omega_{cr3} < \omega_{cr4}$ , см. рис. 2), то и ширина частотного спектра будет расти. Поэтому можем сделать вывод, что в мультигармонических ДСЛСЭ с винтовыми электронными пучками будет формироваться мощная мультигармоническая электромагнитная волна с более широким частотным спектром.

На рис. 3 представлены зависимости амплитуд напряженности электрического поля пятнадцати гармоник электромагнитной волны сигнала от продольной координаты  $z$  для угла влета электронного пучка  $\alpha = 0^\circ$  (кривые 1) и  $\alpha = 30^\circ$  (кривые 2). Параметры, при которых производился расчет, такие же, как и для рис. 2, за исключением напряженности магнитного поля накачки, которая равна  $\sqrt{B_{2y}^2 + B_{2x}^2} = 141$  Гс. На вход исследуемого ДСЛСЭ подается монохроматический сигнал с частотой  $\omega_1 = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$ . Расчет зависимостей производился с помощью системы уравнений для амплитуд гармоник напряженностей электрического поля (11).

Рис. 3 подтверждает выводы, полученные при анализе рис. 2. Из него следует, что темпы усиления гармоник напряженности электрического поля для винтового электронного пучка (кривые 2) выше, чем для прямолинейного электронного пучка (кривые 1). Также из этого рисунка следует, что благодаря

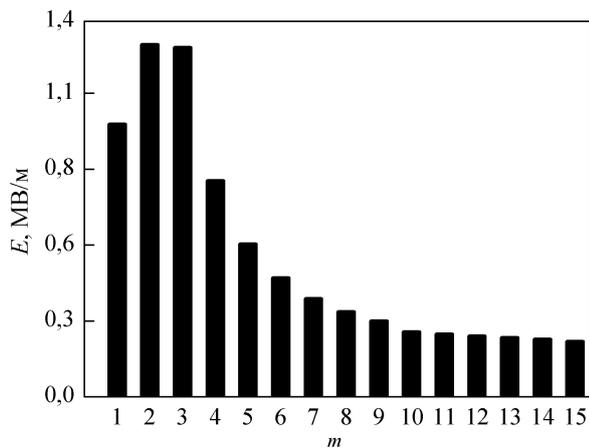


**Рис. 3** – Зависимости амплитуд напряженности электрического поля гармоник электромагнитной волны сигнала от продольной координаты  $z$  для угла влета электронного пучка  $\alpha = 0^\circ$  (кривые 1) и  $\alpha = 30^\circ$  (кривые 2) в случае монохроматического входного сигнала. Кривая 3 соответствует зависимости амплитуды 1-й гармоники напряженности электрического поля от продольной координаты  $z$  для угла влета пучка  $\alpha = 0^\circ$ . Частота первой гармоники  $\omega_1 = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$

множественным трехволновым параметрическим резонансам возбуждаются высшие гармоники, а затем усиливаются благодаря дополнительному механизму усиления (двухпотоковая неустойчивость). В результате таких процессов формируются мультигармонические электромагнитные волны. На рис. 4 представлен спектр такой электромагнитной волны сигнала в точке с координатой  $z = 75,2$  см, угол влета электронного пучка  $\alpha = 30^\circ$ . Видим, что в исследуемом устройстве происходит формирование мультигармонической электромагнитной волны, в которой амплитуды гармоник имеют соизмеримые амплитуды в широком частотном спектре. Это является необходимым условием для формирования ультракоротких электромагнитных кластеров электромагнитного поля [1, 17]. Отметим, что благодаря трехволновым параметрическим резонансам также возбуждаются волны с частотами, которые превышают критическую частоту  $\omega_{cr4} = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$ .

Рассмотрим формирование мультигармонической электромагнитной волны в ДСЛСЭ с прямолинейными пучками ( $\alpha = 0^\circ$ ). Как уже было сказано ранее, из рис. 2 следует, что инкремент нарастания *первой гармоники* электромагнитной волны сигнала для пучка с  $\alpha = 0^\circ$  при низких частотах ( $\omega_1 = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$ ) является более высоким по сравнению с инкрементами нарастания сигнала в ДСЛСЭ с винтовыми электронными пучками (сравните кривую 1 и кривые 2-4 на рис. 2). Это обусловлено, с одной стороны, увеличением влияния параметрического механизма усиления при понижении частоты, а с другой стороны, при низких частотах происходит уменьшение инкремента нарастания двухпотоковой неустойчивости. В результате первая гармоника сигнала для ДСЛСЭ с прямолинейным пучком ( $\alpha = 0^\circ$ ) получает существенное усиление, как это

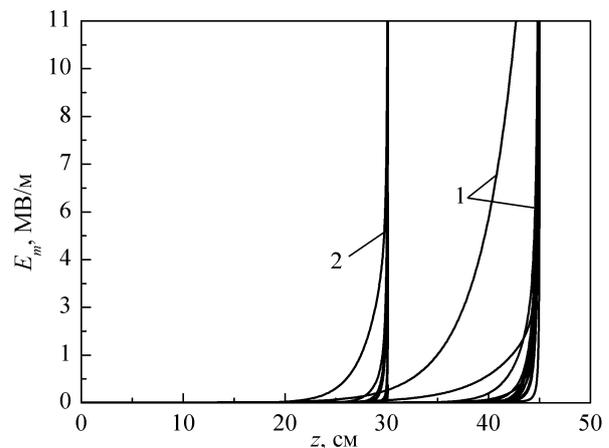
следует из рис. 3, кривая 3. В итоге, первая гармоника доминирует над высшими гармониками и формирование электромагнитного сигнала с широким спектром в ДСЛСЭ с прямолинейным РЭП ( $\alpha = 0^\circ$ ), в котором гармоники будут иметь соизмеримые амплитуды становится затруднительным. Поэтому для формирования сигналов с широким частотным спектром предпочтительно использовать именно винтовые электронные пучки. Также, как следует из рис. 3, в двухпотоковых ДСЛСЭ, которые используют винтовые электронные пучки, из-за более высоких темпов усиления насыщение будет происходить раньше, а значит, такие устройства будут иметь меньшие продольные размеры по сравнению с ДСЛСЭ, использующие прямолинейные пучки.



**Рис. 4** – Зависимость амплитуд напряженности электрического поля гармоник электромагнитной волны сигнала от номера гармоники в точке с координатой  $z = 75,2$  см, угол влета электронного пучка  $\alpha = 30^\circ$ , случай монохроматического входного сигнала. Частота первой гармоники  $\omega_1 = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$

Проведем анализ ситуации, когда на вход исследуемой системы подается *мультигармонический* входной сигнал, который состоит из трех ненулевых первых гармоник электромагнитной волны. Для этого случая зависимости амплитуд напряженности электрического поля пятнадцати гармоник электромагнитной волны сигнала от продольной координаты  $z$  для угла влета электронного пучка  $\alpha = 0^\circ$  (кривые 1) и  $\alpha = 30^\circ$  (кривые 2) представлены на рис. 5. Параметры, при которых производился расчет, такие же, как и для рис. 3. Расчет зависимостей производился с помощью системы уравнений для амплитуд гармоник напряженностей электрического поля (11). Из рис. 5 следует, что в случае мультигармонического входного сигнала насыщение происходит при угле влета  $\alpha = 0^\circ$  на длине  $z \sim 45$  см (для монохроматического входного сигнала  $z \sim 90$  см, рис. 3), при угле влета  $\alpha = 30^\circ$  на длине  $z \sim 30$  см (для монохроматического входного сигнала  $z \sim 75$  см, рис. 3). Таким образом, наличие входного мультигармонического сигнала, состоящего из незначительного количества гармоник (три гармоники) приводит к существенному снижению длин насыщения (в два раза и более), как для прямолинейного, так и

для винтового релятивистского электронного пучка. Такое влияние на длины насыщения мультигармонического входного сигнала объясняется следующими обстоятельствами. Во-первых, благодаря использованию мультигармонического входного сигнала происходит более быстрое возбуждение высших гармоник ВПЗ, которые фактически определяют формирование выходной мультигармонической электромагнитной волны. Во-вторых, возбуждение высших гармоник ВПЗ происходит на более высоких частотах, которые характеризуются более высокими инкрементами нарастания. Таким образом, использование мультигармонических входных сигналов приводит к более интенсивному формированию мощной электромагнитной волны с широким частотным спектром.



**Рис. 5** – Зависимости амплитуд напряженности электрического поля гармоник электромагнитной волны сигнала от продольной координаты  $z$  для угла влета электронного пучка  $\alpha = 0^\circ$  (кривые 1) и  $\alpha = 30^\circ$  (кривые 2) в случае мультигармонического входного сигнала. Частота первой гармоники  $\omega_1 = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$

## 6. ВЫВОДЫ

Таким образом, в представленной работе построена квадратичная нелинейная теория мультигармонического двухпотокового супергетеродинного лазера на свободных электронах Н-убитронного типа с винтовыми электронными пучками. Изучены случаи как монохроматического, так и мультигармонического входного сигнала.

Продемонстрировано, что исследуемый ЛСЭ, использующий винтовые электронные пучки, характеризуется более высокими темпами усиления по сравнению с ДСЛСЭ с прямолинейными РЭП. Это связано с тем, что инкременты двухпотоковой неустойчивости для винтовых двухскоростных электронных пучков существенно выше, чем для прямолинейных. Из этого следует, что ДСЛСЭ с винтовыми электронными пучками будут иметь меньшие длины насыщения, а значит и меньшие продольные габариты.

Изучен режим работы ДСЛСЭ, при котором частота первой гармоники сигнала много меньше критической частоты двухпотоковой неустойчивости. Показано, что в этом режиме ширина частотного

спектра электромагнитного сигнала ДСЛСЭ, которая определяется частотой первой гармоники и критической частотой двухпотоковой неустойчивости, увеличивается с увеличением угла влета  $\alpha$  двухскоростного электронного пучка по отношению к фокусирующему магнитному полю. Этот эффект обусловлен увеличением критической частоты двухпотоковой неустойчивости  $\omega_{cr}$  при увеличении угла влета  $\alpha$ .

Выяснено, что в случае мультигармонического входного сигнала, состоящего из малого количества гармоник (три гармоники) длины насыщения уменьшаются более чем в два раза по сравнению с ситуацией, когда на вход подается монохроматическая электромагнитная волна.

Продемонстрировано, что использование винтовых

электронных пучков в мультигармонических двухпотоковых супергетеродинах лазерах на свободных электронах приводит к увеличению их усилительных характеристик, ширины частотного спектра в режиме генерации мультигармонического сигнала, а также его продольных габаритов. Таким образом, ДСЛСЭ, использующие винтовые двухпотоковые электронные пучки, являются более перспективными по сравнению с устройствами с прямолинейными пучками для формирования мощных мультигармонических электромагнитных сигналов с широким частотным спектром.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа была выполнена в рамках госбюджетной научно-исследовательской работы № 0117U002253.

## Plural Interactions of Waves in Multiharmonic Two-stream Superheterodyne Free-electron Lasers with Helical Electron Beams

A.V. Lysenko, I.I. Volk, G.A. Oleksiienko

*Sumy State University, 2, Rimsky-Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine*

We carried out an analysis of plural wave interactions in multiharmonic two-stream superheterodyne free-electron lasers (FELs) of H-ubitron type with helical relativistic electron beams (REB) in the small signal approximation. The cases of monochromatic and multiharmonic input signals were studied. We demonstrated that investigated multiharmonic FELs have higher amplification rates compared with two-stream superheterodyne FELs using straight REBs. We found out that frequency spectrum of electromagnetic signal forming in multiharmonic two-stream superheterodyne FELs with helical REBs is broader in comparison with frequency spectrum in similar FELs using straight REBs.

**Keywords:** Two-stream superheterodyne free-electron lasers, Two-stream instability, Helical electron beams, Plural three-wave resonances.

## Множинні взаємодії хвиль в мультигармонічних дво потокових супергетеродинах лазерах на вільних електронах з гвинтовими електронними пучками

О.В. Лисенко, Ю.Ю. Волк, Г.А. Олексієнко

*Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007 Суми, Україна*

Проведено аналіз множинних взаємодій хвиль у мультигармонічних дво потокових супергетеродинах лазерах на вільних електронах (ЛВЕ) Н-убітронного типу з гвинтовими релятивістськими електронними пучками (РЕП) у наближенні слабого сигналу. Розглянуто випадки монохроматичного та мультигармонічного входних сигналів. Показано, що досліджувані мультигармонічні ЛВЕ мають більш високі темпи підсилення порівняно з дво потоковими супергетеродинами ЛВЕ, що використовують прямолінійні РЕП. Визначено, що ширина частотного спектра електромагнітного сигналу, який формується мультигармонічними дво потоковими супергетеродинами ЛВЕ з гвинтовими РЕП, є більшою порівняно з шириною частотного спектра аналогічних ЛВЕ, що використовують прямолінійні РЕП.

**Ключові слова:** Дво потокові супергетеродинах лазери на вільних електронах, Дво потокова нестійкість, Гвинтові електронні пучки, Множинні трихвильові резонанси.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. V.V. Kulish, *Hierarchical Electrodynamics and Free Electron Lasers: Concepts, Calculations, and Practical Applications* (Boca Raton: CRC Press: 2011).
2. G. Bekefi, K.D. Jacobs, *J. Appl. Phys.* **53**, 4113 (1982).
3. M. Botton, A. Ron, *J. Appl. Phys.* **67**, 6583 (1990).
4. H. Wilhelmsson, *Phys. Scr.* **44**, 603 (1991).
5. W. Liu, Z. Yang, Z. Liang, *Int. J. Infrared. Milli. Waves* **27**, 1073 (2007).
6. H. Mehdian, N. Abbasi, *Phys. Plasmas* **15**, 13111 (2008).
7. M.H. Rouhani, B. Maraghechi, H. Saberi, *Phys. Plasmas* **16**, 123105 (2009).
8. S. Saviz, H. Mehdian, *Can. J. Phys.* **88**, 15 (2010).
9. F.M. Aghamir, N. Mahdizadeh, *Phys. Plasmas* **19**, 32114 (2012).
10. N. Mahdizadeh, F.M. Aghamir, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **688**, 51 (2012).

11. N. Mahdizadeh, F.M. Aghamir, *J. Appl. Phys.* **113**, 83305 (2013).
12. S. Nadrifard, B. Maraghechi, T. Mohsenpour, *Plasma Phys. Control. Fusion* **55**, 25012 (2013).
13. S. Saviz, M. Karimi, *Chin. Phys. B* **23**, 34103 (2014).
14. N. Mahdizadeh, *J. Plasma Phys.* **81**, 905810612 (2015).
15. S.-K. Nam, *Jpn. J. Appl. Phys.* **54**, 56202 (2015).
16. T. Mohsenpour, H. Ehsani Amri, Z. Norouzi, *Int. J. Opt. Photonic Eng.* **10**, 91 (2016).
17. V.V. Kulish, O.V. Lysenko, V.I. Savchenko, I.G. Majornikov, *Laser Phys.* **15**, 1629 (2005).
18. S. Saviz, E. Lashani, F.M. Aghamir, *Chin. Phys. B* **21**, 104104 (2012).
19. S. Saviz, Z. Rezaei, F.M. Aghamir, *Chin. Phys. B* **21**, 94103 (2012).
20. T. Mohsenpour, N. Mehrabi, *Phys. Plasmas* **20**, 82133 (2013).
21. T. Mohsenpour, O.K. Rezaee Rami, *Phys. Plasmas* **21**, 72113 (2014).
22. A. Lysenko, I. Volk, A. Serozhko, O. Rybalko, *Chinese Phys. Lett.* **34**, 75202 (2017).
23. A. Lysenko, I. Volk, *Plasma Sci. Technol.* **20**, 35002 (2018).
24. N.A. Krall, A.W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (San Francisco: San Francisco Press: 1986).
25. E.L. Saldin, E.V. Schneidmiller, M.V. Yurkov, *The Physics of Free Electron Lasers* (Berlin: Springer Science & Business Media: 2013).