

Определение силовых констант сигналов акустической эмиссии в уравнениях движения модели сложной структуры сплошной среды

В.В. Марасанов, А.А. Шарко*

Херсонский национальный технический университет, ул. Бериславское Шоссе, 24, 73008 Херсон, Украина

(Получено 12.10.2017, в отредактированной форме – 30.10.2017, опубликовано online 24.02.2018)

Предложена модель силового поля зарождения изменений структуры материалов, инициирующих возникновение предвестников сигналов акустической эмиссии (АЭ), учитывающая внутреннее движение структурных составляющих среды. В предположении однородности системы получены уравнения малых продольных колебаний. На основе рассмотрения зеркальной симметрии компонентов матрицы силовых констант доказана угловая зависимость перемещения источника АЭ. Установлена трансляционная и ротационная инвариантность преобразований упругой энергии в уравнениях движения, позволяющая кроме соотношения пропорций, установить вид согласованности отдельных частей системы. На основе вычислительного эксперимента данных рентгеноструктурного анализа и диаграммы нагружения при разрывных испытаниях выполнен расчет силовых констант структурных составляющих среды. Показано что в динамике возникновения сигнала АЭ учет инерции вращения приводит к появлению в кинетической энергии квадрата градиента скорости. В этом случае силы взаимодействия между атомами перестают быть центральными. У них наряду с продольной составляющей появляется и поперечная, обуславливающая возникновение продольных и сдвиговых волн.

Ключевые слова: Акустическая эмиссия, Силовые константы, Сложная структура.

DOI: 10.21272/jnep.10(1).01019

PACS numbers: 43.40.Le, 46.70. – p,
06.60.Ei

1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальность изучения механизмов возникновения сигналов акустической эмиссии от развивающихся дефектов обуславливается необходимостью определения начальной стадии зарождения изменений структуры материалов, инициирующей возможные разрушения конструкции. Если с достаточной точностью известно силовое поле, то решив уравнения движения и задав начальное условие, можно выполнить вычислительный эксперимент, результаты которого можно сравнивать с экспериментально определяемыми величинами и получать информацию о параметрах, которые невозможно измерить.

Анализ публикаций по обозначенной проблеме показывает, что использование классической модели сплошной среды для изучения силового поля в средах с микроструктурой наталкивается на неопределённость, связанную с существованием внутренних движений структурных составляющих среды. [1-4]. Это положение является убедительным мотивом к изучению силового поля предвестников возникновения сигналов АЭ в средах со сложной внутренней структурой.

2. УСТАНОВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ.

В модели сплошной среды в виде линейной цепочки атомы взаимодействуют посредством парных центральных сил, соединяющих атомы и направленных вдоль прямой, соединяющие центры атомов [5]. Эта модель хорошо подходит для описания плотно упакованных структур. Моментная модель сплошной среды основывается на положении, что взаимодействие между атомами остается парным, но осуществляется не только посредством сил, но и мо-

ментов [6]. Вместе с тем, сплошная среда – это механическая система, обладающая бесконечным числом внутренних степеней свободы. Ее движение в пространстве описывается не координатами и скоростями отдельных частиц, а скалярным полем плотности и векторным полем скоростей.

Атомы структурных составляющих материала находятся в непрерывном колебательном движении. Периодичность решетки и состав атомов элементарной ячейки накладывают определенные условия на интервалы существования упругих колебаний и особенности их спектра [3, 7].

В простейшей модели среды с микроструктурой в виде цепочки точечных масс, соединённых упругими связями, уравнение их движения имеет вид [8]:

$$m\ddot{u}(n,t) + \sum_{n'} \Phi(n,n')u(n',t) = q(n,t), \quad (1)$$

где $u(n,t)$ – поле смещений, n – номера частицы, $q(n,t)$ – внешние силы, $\Phi(n,n')$ – силовые константы.

Физический смысл силовых констант согласно уравнению (1) выражает собой силу действующую в определенном направлении на рассматриваемую частицу n элементарной ячейки, когда частица n' смещается на единичную длину в этом же направлении.

Поскольку номера взаимодействующих частиц однозначно не определены, то для $\Phi(n,n')$ необходимо выполнение условий зеркальной симметрии:

$$\Phi(n,n') = \Phi(n',n).$$

Это равенство выражает инвариантность группы преобразований. Симметрия кроме соотношения пропорций определяет вид согласованности отдельных частей системы.

*sharko_artem@ukr.net

В зеркальной симметрии отображение S : переводит произвольную точку G' в ее зеркальный образ G' . Отображение определено, если установлено правило, по которому каждой точке G ставится в соответствие ее образ $G' : G \rightarrow G'$. Зеркальная симметрия возникновения сигналов АЭ при изменениях микро-структуры выражает не только отражение, но и вращение т.е. поворот вокруг перпендикулярной оси.

Фигура, ограничивающая область изменений структуры обладает поворотной симметрией, если она переходит сама в себя при всех поворотах. В механике сплошной среды аналогом такой модели является модель Коссера (рис. 1).

Кинематическими переменными в модели Коссера являются не только продольные и поперечные смещения масс в одной плоскости, но и угол поворота масс в той же плоскости.

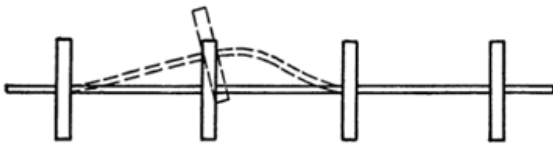


Рис. 1 – Модель Коссера

Наличие внутренних связей между трансляционными и ротационными свойствами сплошной среды с микроструктурой должно проявляться в их связи с осцилляторными свойствами.

В настоящей работе сделана попытка перенести представления среды сложной структуры на распространение сигналов АЭ от развивающихся дефектов.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ.

Приближением модели дефектной структуры, инициирующей упругие волны, может служить двухатомная ячейка, состоящая из частиц разной массы, соединенных упругими связями (рис. 2).

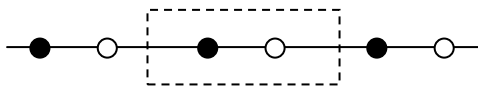


Рис. 2 – Модель элементарной ячейки среды сложной структуры

Инвариантность энергии АЭ сигнала относительно трансляции позволяет заменить движение атомов в двухатомной ячейке движением центра масс ячейки.

Функция Лагранжа для такой ячейки имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{nj} m_j \dot{w}^2(n, j) - \frac{1}{2} \sum_{m'jj'} \Phi(n-n', j, j') w(n, j) w(n', j') + \sum_{nj} f(n, j) w(n, j),$$

где $w(n, j)$ – смещение j -й частицы в n -й ячейке, $f(n, j)$ – внешняя сила, действующая на частицу, $\Phi(n-n', jj')$ – силовые константы.

Силовые константы не зависят от индексов ячеек n' и n , а зависят только от их разности $n' - n$.

В предположении, что система однородна уравнения малых продольных колебаний в сложной структуре сплошной среды, инициирующей распространение АЭ сигнала, принимают вид:

$$m\ddot{u}(n) + \sum_{n'} \Phi^{00}(n-n')u(n') + \sum_{n'} \Phi^{01}(n-n')\eta(n') = q(n), \quad (2)$$

$$I\ddot{\eta}(n) + \sum_{n'} \Phi^{10}(n-n')u(n') + \sum_{n'} \Phi^{11}(n-n')\eta(n') = \mu(n). \quad (3)$$

где $q(n)$ и $\mu(n)$ -обобщенные силы, соответствующие смещению самой ячейки и смещению частиц внутри ячейки, $u(n)$ -смещение частиц внутри ячейки, $\eta(n)$ -смещение центра масс, m_1 и m_2 – массы атомов в ячейке, $I = m_1\xi_1^2 + m_2\xi_2^2$ – момент инерции ячейки, ξ_1 и ξ_2 – координаты частиц в ячейке относительно центра масс.

С учетом этого:

$$u(n) = \frac{1}{m} [m_1 w(n, 1) + m_2 w(n, 2)],$$

$$\eta(n) = \frac{m_1 \xi_1 w(n, 1) + m_2 \xi_2 w(n, 2)}{I}.$$

Матрица $\Phi^{ss'}(n)(s, s' = 0, 1)$ по координатно выражается через силовые константы $\Phi(n, j, j')$ предвестников АЭ сигнала:

$$\Phi_{(n)}^{ss'} = \begin{pmatrix} \Phi^{00} & \Phi^{01} \\ \Phi^{10} & \Phi^{11} \end{pmatrix},$$

где $\Phi^{SS'}(n) = \Phi^{S'S}(-n)$, $\sum \Phi^{00}(n) = 0$, $\sum \Phi^{10}(n) = \sum \Phi^{01}(n) = 0$.

Если всем атомам задать одинаковое смещение от положения равновесия, то произойдет смещение всей ячейки без внутренней деформации, которое не зависит от порядка следования индексов атомов в ячейке.

Из условий симметрии так же следует, что матрица силовых констант $\Phi^{SS'}(n-n')$ должна иметь угловую зависимость перемещения источника АЭ сигнала.

Для однозначной нумерации частиц в двухатомной ячейке будем использовать математическую абстракцию, симметрии Г. Вейля [9]. На начальном этапе присвоение частице символа левая или правая произвольно. Однако, после того как этот выбор сделан, в дальнейших исследованиях понятие левого и правого становится однозначным и неизменным. Описание пространства дефектной структуры предвестников АЭ может быть выполнено с учетом конгруэнтности фигур. Отображения пространства S из которых одно обратному представляют собой два взаимно однозначных преобразования. Преобразование, сохраняющее структуру пространства, является автоморфизмом. Автоморфизм переводит акустический сигнал, вызванный изменением структуры при трещинообразовании, в функцию тригонометрических сумм:

$$\sum_n e^{2\pi i f(n)} = \sum_n \cos[2\pi f(n)] + \sum_n \sin[2\pi f(n)],$$

где $f(n)$ – некоторый многочлен с рациональными коэффициентами.

При такой постановке автоморфизм переводит конфигурацию области структуры материала, в которой произошли изменения под воздействием внешних сил, в не отличимое от него конгруэнтное отображение области, инициирующей возникновение сигнала АЭ. Понятия автоморфизма здесь использовано как преобразование Фурье.

Коэффициенты преобразования Фурье находятся путем вычисления скалярного произведения сигнала с комплексными экспонентами:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt ,$$

где $f(t)$ – сигнал, $F(\omega)$ – преобразование Фурье.

Форма распространяющегося АЭ сигнала, зависит не только от времени смещения, но и от частоты ω . Поэтому, наряду с функциями смещения $u(t)$, следует рассматривать их Фурье образы $u(\omega)$, связанные соотношениями:

$$u(\omega) = \int u(t)e^{i\omega t} dt ,$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int u(\omega)e^{-i\omega t} d\omega .$$

Спектр суммарной функции времени равен сумме спектров ее составляющих. Фурье-образ реального сигнала обладает симметрией, что позволяет сводить сложные функции к более простым.

Если считать, что разрыв дефектной структуры материала осуществляется силами, приложенными на границах цепочки или на краях трещины, то в уравнениях движения появляется нулевая часть и уравнения движения (2) и (3) становятся инвариантными относительно однородной деформации. Рассматриваемая модель силового поля зарождения изменений структуры материала, инициирующих возникновение предвестников АЭ, будет обладать зеркальной симметрией.

Смещение $w(n,j)$ равно:

$$w(n, j) \rightarrow w(n, j) + w_0 ,$$

где w_0 – произвольная постоянная.

Использование преобразований Фурье для анализа спектра акустического сигнала от развивающегося дефекта и обратных преобразований от полученного сигнала к изменениям структуры предвестников АЭ выполнено на основании понятий поворотной симметрии.

Если заданы два отображения S и T , то их можно выполнять одно за другим: если S переводит точку G в G' , а T переводит G' в G'' , то результирующее отображение ST переводит точку G в точку G'' . Возможно и обратное отображение S' , при котором $SS' = I$ и $S'S = I$. Аналогичное положение имеет место, если сначала выполнить S' , а затем S .

Основное симметричное преобразование кристаллических структур – бесконечное повторение характеристик развивающихся дефектов. Ни одна из точек среды не остается на месте. Все они бесконечно

повторяются с помощью трансляции. Для каждой структуры предвестников возникновения акустических сигналов характерен определенный набор трансляций.

При учете трансляционной инвариантности накладываются соответствующие условия на силовые константы:

$$\sum_{nj'} (\xi_j - an)\Phi(n, j, j') = 0 ,$$

$$a \sum_n n\Phi^{10}(n) - \sum_n \Phi^{11}(n) = 0 ,$$

где a – расстояние между центрами масс соседних ячеек.

Для переменных $u(n)$, $\eta(n)$ имеется дополнительное ротационное преобразование соответствующее вращению системы на угол η_0 , относительно которого должны быть инвариантны упругая энергия и уравнения движения:

$$u(n) \rightarrow u(n) + \eta_0 an ,$$

$$\eta(n) \rightarrow \eta(n) + \eta_0 .$$

Линейное дифференциальное уравнение для АЭ сигнала от предвестника разрушения $\mathbf{X}(t)$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{C}(t) , \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 ,$$

где $\mathbf{X}(t)$ – вектор структурного состояния предвестника АЭ, $\mathbf{A}(t)$ – матрица характеристик сигналов АЭ, $\mathbf{B}(t)$ – матрица чувствительности к помехам, $\mathbf{C}(t)$ – вектор-столбец низкочастотной составляющей АЭ, вызванной аппаратурными погрешностями и вибрацией элементов конструкций с известными статистическими характеристиками:

$$\langle \mathbf{C}(t) \rangle = 0 , \quad \langle \mathbf{C}(t)\mathbf{C}^T(t - \tau) \rangle = \mathbf{Q}\delta(\tau) ,$$

где $\mathbf{C}(t)\mathbf{C}^T(t - \tau)$ – математическое ожидание процесса возникновения сигнала АЭ, \mathbf{Q} – дисперсионная матрица, выражающая мощность процесса инициирования АЭ, $\delta(\tau)$ – дельта функция.

Численное решение этого уравнения можно получить на основании общего решения, которое имеет вид.

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t, t_0)\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t, s)\mathbf{B}(s)\mathbf{C}(s)ds ,$$

где s – граничная область, $\mathbf{F}(t, t_0)$ – матрица решений, обладающая свойствами зеркальной симметрии:

$$\mathbf{F}^{-1}(t, t_0) = \mathbf{F}(t_0, t) ,$$

$$\mathbf{F}(t_3, t_2)\mathbf{F}(t_2, t_1) = \mathbf{F}(t_3, t_1) ,$$

Полная система уравнений силового поля зарождения изменений структуры материалов, инициирующих возникновение предвестников АЭ для модели сложной структуры среды, в условиях равновесия имеет вид:

$$a \sum_n n^2 \Phi^{00}(n) - 2 \sum_n n \Phi^{01}(n) = 0,$$

$$a \sum_n n \Phi^{10}(n) - \sum_n n \Phi^{11}(n) = 0.$$

Результаты экспериментальных исследований по установлению взаимосвязи возникновения сигналов АЭ с параметрами силового поля при различных стадиях нагружения образцов стали СтЗсп представлены на рис.3.

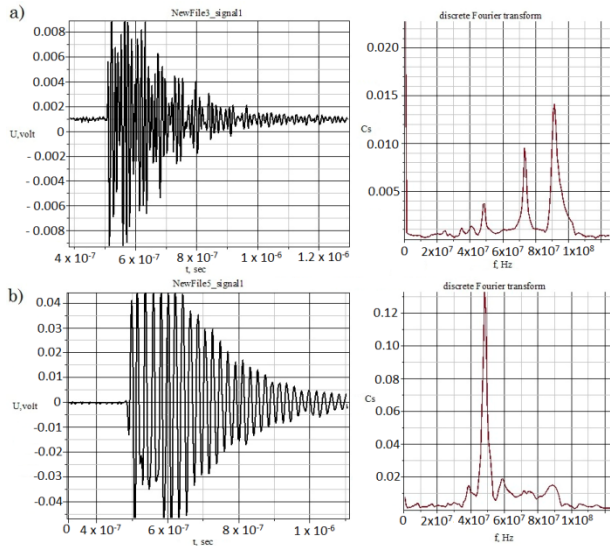


Рис. 3 – Распределение спектральной плотности АЭ сигналов, выполненное с помощью Фурье преобразования а) $P = 1650$ кг, б) $P = 2170$ кг

Идентификация АЭ сигналов выполнена при помощи частотно-временного представления. Распределение спектральной плотности АЭ сигналов выполнено с помощью преобразований Фурье.

При возрастании приложенной нагрузки и увеличении относительной деформации образцов происходит образование высокоамплитудных акустических сигналов, коррелирующее с деформационными скачками.

Поскольку квадрат амплитуды АЭ сигнала пропорционален его мощности, то с возрастанием нагрузки на материал и увеличении степени относительной деформации возрастает мощность АЭ сигнала.

Результаты эксперимента позволяют вычислить энергию разрыва одной ячейки, при которой начинается акустическая эмиссия в виде вращательной $W_{вр}$ и поступательной $W_{пост}$ компоненты движения ячейки, инициирующей возникновение сигналов АЭ:

$$W = W_{вр} + W_{пост} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv_l^2}{2},$$

где v_l – скорость распространения продольной волны или поскольку $I = m_1\xi_1^2 + m_2\xi_2^2$ при $m_1 = m_2$ и $\xi_1 = \xi_2$ с расположением начала отчета координат в центре масс ячейки имеем $I = 2m\xi^2$. Поскольку $\omega = v_l / \xi$, где $v_l = 3200$ м/с скорость распространения поперечных волн, $v_l = 5850$ м/с, скорость распространения про-

дольных волн, тогда:

$$W_{вр} = mv_l^2,$$

$$W = m \left(v_l^2 + \frac{v_l^2}{2} \right).$$

Для выполнения расчетов на атомном уровне полагая массу атома железа $m = 9,3 \cdot 10^{-26}$ кг имеем значения энергии $W = 2,54 \cdot 10^{-18}$ Дж.

Для выполнения расчета на макроскопическом уровне $m = P_{max} / Ng$ где $P_{max} = 2260$ кг – наблюдаемое в эксперименте максимальное усилие при разрыве стального образца, N – общее количество ячеек в разрываемом сечении образца.

Величина N определялась по формуле:

$$N = \frac{S}{a^2},$$

где S – площадь сечения в зоне разрыва, a – расстояние между атомами в решетке.

Согласно данным рентгеноструктурного анализа [10] величина $a = 2,5 \cdot 10^{-10}$ м. Площадь сечения в зоне разрыва образца с учетом конфигурации разрушения равна 60 мм². Тогда $N = 9,6 \cdot 10^{14}$ и $W = 6,57 \cdot 10^{-6}$ Дж. Это значение является количественным параметром чувствительности акустико-эмиссионной аппаратуры, предназначенной для фиксации начальной стадии возникновения сигнала АЭ. Значение силовых констант, определенное через параметры микроструктуры a и N и параметры сплошной среды S , P_{max} , v_l , v_l , определялось как: $\Phi = 2W / aS = 876 \cdot 10^6$ Н. Оно определяет порядок силовых констант.

Для определения прочности межатомных связей в ядерном масштабе следует рассмотреть энергию связи атомных ядер, которая необходима для полного расщепления ядра на отдельные нуклоны. Энергия связи атомных ядер определяется через дефект масс Δm :

$$\Delta E_{св} = \Delta mc^2.$$

Дефект масс — это разность между суммарными массами всех нуклонов ядра в свободном состоянии и массой ядра:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_a,$$

где Z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева, A – массовое число, $m_p = 1.00786$ а.е.м. – масса протона, $m_n = 1.00867$ а.е.м. – масса нейтрона, m_a – масса ядра.

Удельная энергия связи выражает собой энергию связи, приходящуюся на один нуклон. Вычисления выполненные в атомных единицах массы для атомов Fe дали значения $\Delta m = 56 \cdot 1.00786 + (56 - 26) \cdot 1.00867 - 55.9355 = 0.52896$ а.е.м. С учетом этого энергия связи $E = 931$ МэВ $\cdot 0.52896$ а.е.м. = 492.461 МэВ. В свою очередь удельная энергия связи $E/n = 492.461/56 = 8.79396$ МэВ на нуклон.

При этом следует помнить, что масштабные параметры малы по сравнению с размером тела и по-

этому сопоставление результатов может носить лишь качественный характер.

Существование связей между параметрами микроструктуры и прочностными свойствами среды позволяет ставить и решать задачу о синтезе материала с заданными механическими свойствами. Для этого необходимо по заданным модулям материала определить параметры микроструктуры в том числе и силовые константы, получив которые можно разрабатывать соответствующие технологии их производства.

ВЫВОДЫ

Уравнения движения системы и ее энергия полностью определяются заданием силовых констант $\Phi(n)$, которые для среды с микроструктурой в стационарном состоянии симметричны и вещественны.

Дискретность кристаллических структур и их трансляционная инвариантность приводят к отличию протекания волновых процессов в сплошной

среде.

В динамике возникновения сигнала АЭ учет инерции вращения приводит к появлению в кинетической энергии квадрата градиента угловой скорости. В этом случае силы взаимодействия между атомами перестают быть центральными и наряду с продольной составляющей появляется поперечная, вызванная предвестниками развивающихся дефектов в сплошной среде. Таким образом обеспечивается связь между трансляционными и ротационными степенями свободы частиц и их осциляторными свойствами.

Описание силовых констант микроструктуры развивающихся дефектов в виде двухатомной цепочки целесообразно лишь в том случае, если параметры ячеек предвестников сигналов АЭ изменяются достаточно медленно. В противном случае понятие ячейки становится условным и нет оснований отказываться от модели среды простой структуры.

Визначення силових констант сигналів акустичної емісії в рівняннях руху моделі складної структури суцільного середовища

В.В. Марасанов, А.О. Шарко

Херсонський національний технічний університет, вул. Бериславське шосе, 24, 73008 Херсон, Україна

Запропоновано модель силового поля зародження змін структури матеріалів, що ініціюють виникнення провісників сигналів акустичної емісії (АЕ), що враховує внутрішній рух структурних складових середовища. У припущенні однорідності системи отримані рівняння малих позовжніх коливань. На основі розгляду дзеркальної симетрії компонентів матриці силових констант доведена кутова залежність переміщення джерела АЕ. В параметрах матриці силових констант встановлена трансляційна і ротаційна інваріантність перетворень в пружній енергії і рівняннях руху, що дозволяє крім співвідношення пропорцій встановити вид узгодженості окремих частин системи. На основі обчислювального експерименту даних рентгеноструктурного аналізу і діаграми навантаження при розривних випробуваннях виконаний розрахунок силових констант структурних становить середовища. Показано що в динаміці виникнення сигналу АЕ облік інерції обертання призводить до появи в кінетичній енергії квадрата градієнта швидкості. В цьому випадку сили взаємодії між атомами перестают бути центральними. У них поряд з позовжньою складовою з'являється і поперечна, яка обумовить виникнення позовжніх і зсувних хвиль.

Ключові слова: Акустична емісія, Силові константи, Складна структура.

Determination of the Power Constants of the Acoustic Emission Signals in the Equations of the Model of the Complex Structure Motion of a Continuous Medium

V.V. Marasnov, A.A. Sharko

Kherson National Technical University, Berislav highway, 24, 73008 Kherson, Ukraine

A model of the force field for the initiation of changes in the structure of materials initiating the emergence of precursors of acoustic emission (AE) signals, taking into account the internal motion of the structural components of the medium, is proposed. On the assumption of the homogeneity of the system, equations of small longitudinal oscillations are obtained. Based on the consideration of the mirror symmetry of the components of the force constant matrix, the angular dependence of the displacement of the AE source is proved. In the parameters of the matrix of force constants, the translational and rotational invariance of the transformations in the elastic energy and the equations of motion is established, which, in addition to the proportion of proportions, establishes the type of consistency of the individual parts of the system. On the basis of a computational experiment of X-ray diffraction data and a loading diagram for explosive tests, the force constants of the structural components of the medium were calculated. It is shown that in the dynamics of occurrence of the AE signal, the calculation of the inertia of rotation leads to the appearance in the kinetic energy of the square of the velocity gradient. In this case, the forces of interaction between atoms cease to be central. In addition to the longitudinal component, they also have a transverse component,

which causes the formation of longitudinal and shear waves.

Keywords: Acoustic emission, Power constants, Complex structure.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Carpinteri, G. Lacedogna, N. Pugno, *Engineer. Fract. Mechanics* No 74, 273. (2007).
2. V.V. Marasanov, A.A. Sharko, *IEEE First Ukrcon Conference of Electrical and Computer Engineering (UKRCON) Kyiv 680* (2017).
3. V.V. Marasanov, A.A. Sharko, *J. Nano- Electron. Phys.* **9** No 2, 02012 (2017).
4. Y.A. Lymarenko, A.D. Shamprovskij, *Technical Diagnostics and Non-Destructive Testing* No 1, .30 (2003).
5. A.I. Potapov, I.S. Pavlov, S.A. Lisina, *J. Sound Vibration* **322** No. 3, P. 564 (2009).
6. I.S. Pavlov, *Acoust. Phys.* **56**, N 6, 924 (2010).
7. V.V. Marasanov, A.A. Sharko, *J. Nano- Electron. Phys.* **9** No 4, 04024 (2017).
8. I.V. Bojko, A.M Gryshchuk, *J. Nano- Electron. Phys.* **8** No 4, 04001 (2016).
9. R.V. Goldshtein, S.V. Kuznetsov, *J. Computational Continuum Mechanics* **8** No 1, 35 (2015).
10. A.A. Lependin, V.V. Polyakov, *J. Techn. Phys.* **59** No 7, 1041 (2014).
11. В.М. Чубаров, *Аналитика и контроль* **15** No 3, 339 (2011) (V.M. Chubarov, *Analitika I kontrol* **15** No 3, 339 (2011)) [Russian].