

Прецессия ферромагнитной наночастицы с конечной анизотропией в вязкой жидкости

Т.В. Лютый*, А.Н. Гришко, А.А. Ковнер, Е.С. Денисова

Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина

(Получено 22.11.2016; опубликовано online 23.12.2016)

В работе с помощью классического подхода описывается магнитная динамика и механическое вращение вокруг центра масс одноосной ферромагнитной наночастицы, взвешенной в вязкой жидкости. В частности, рассматривается синхронное вращение вектора магнитного момента и орта, связанного с осью легкого намагничивания, вместе с циркулярно-поляризованным внешним магнитным полем. Особенность такого режима для данной системы состоит в том, что как магнитный момент, так и ось легкого намагничивания не будут лежать в плоскости поляризации поля. Данный факт объясняется наличием эффективного постоянного поля, перпендикулярного плоскости поляризации. Полученные результаты позволяют проводить более реалистичные оценки мощности потерь внешнего поля, взаимодействующего с ферромагнитной жидкостью.

Ключевые слова: Ферромагнитная наночастица, Уравнение движения, Прецессия, Эффективное поле.

DOI: [10.21272/jnep.8\(4\(2\)\).04086](https://doi.org/10.21272/jnep.8(4(2)).04086)

PACS numbers: 47.65.Cb, 75.50.Tt, 76.20.+q

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача описания траекторий ферромагнитных наночастиц, взвешенных в жидкости, напрямую связана с проблемой микроскопического описания отклика ферромагнитной жидкости [1] на внешнее поле. В-первых, характер движения каждой частички в результате определяет ту или иную форму их коллективного поведения, что само по себе позволяет претендовать на аналитические результаты. Во-вторых, внимание к микроскопическому поведению позволяет совершенствовать подходы к численному описанию поведения феррожидкостей и уменьшать вычислительные затраты для получения необходимого результата. В то же время, поставленная задача далеко не тривиальна, и в тех или иных приближениях исследуется достаточно давно.

Важным как с методической, так и с практической точек зрения является динамическое приближение, при котором тепловые флуктуации считаются пренебрежимо малыми. Таким образом, мы получаем не только опорное представление о динамике наночастицы, но и при определенных обстоятельствах (условия будут оговорены ниже) результаты данного приближения вполне адекватны реальной ситуации. Базой для динамического описания являются классические уравнения движения. Например, для описания прецессии магнитного момента, возбуждаемого циркулярно-поляризованным полем в неподвижной частице, успешно использовалось уравнение Ландау-Лифшица [2]. Для случая прецессии в таком поле жесткого сферического диполя применялось основное уравнение вращательного движения с моментом силы трения, пропорциональным угловой скорости [3].

Однако попытки описания совместной магнитной и механической динамики наночастицы в жидкости не всегда приводили к непротиворечивым результатам. Так, в работе [4] путем линеаризации уравнения Лагранжа были получены приближенные выражения для угловых характеристик прецессии в случае малых амплитуд поля. Обобщение результатов на слу-

чай произвольных частот и амплитуд поля возможно осуществить через анализ непосредственных уравнений движения. Запись последних, как показал ряд неудачных попыток [5, 6], оказалась своеобразным вызовом для теоретиков. Только сравнительно недавно был предложен последовательный подход на базе закона сохранения полного момента импульса [7]. Именно используя полученные в упомянутой работе уравнения движения, мы описываем особенности прецессии магнитного момента и легкой оси наночастицы с конечной анизотропией в вязкой жидкости под действием вращающегося поля, а, также, исследуем зависимости характеристик стационарных решений от параметров системы.

2. МОДЕЛЬ И ЕЕ ОБОСНОВАНИЕ

Мы рассматриваем сферическую ферромагнитную наночастицу радиуса R , намагниченности \mathbf{M} и плотностью ρ . Одноосная анизотропия характеризуется полем анизотропии H_a . Далее, предполагаем, что частица однодоменная и изменение намагниченности происходит без изменения ее модуля ($|\mathbf{M}| = M = \text{const}$), поскольку за счет сильного обменного взаимодействия все спиновые магнитные моменты всегда остаются параллельными. Кроме движения намагниченности относительно кристаллической решетки предполагаем, что сама частица может вращаться вокруг своего центра масс, будучи взвешенной в жидкости с вязкостью η . Поступательное движение частицы не принимается во внимание.

Как отмечалось ранее, для описания совместной магнитной и механической вращательной динамики наночастицы не достаточно совместного использования уравнений, описывающих перемещение неподвижной частицы и движение частицы, магнитный момент которой жестко связан с кристаллической решеткой. Непротиворечивый подход к решению данной задачи был предложен в работе [7], где исходя из закона сохранения полного момента импульса была записана следующая система уравнений:

* lyuty@oeph.sumdu.edu.ua

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad (1)$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \gamma^{-1}V\dot{\mathbf{M}} + V\mathbf{M} \times \mathbf{H} - 6\eta V\boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma(\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}) + \alpha M^{-1}[\mathbf{M} \times (\dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M})], \quad (3)$$

где \mathbf{n} – орт, показывающий направление оси анизотропии, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость частицы, $J (= 8\pi\rho R^5/15)$ – момент инерции, γ – гиромагнитное соотношение, \mathbf{H} – внешнее однородное поле, V – объем частицы, α – параметр затухания, \mathbf{H}_{eff} – эффективное магнитное, учитывающее внутреннее поле анизотропии как

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H} + H_a M^{-1}(\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (4)$$

Наконец, точка сверху означает производную по времени. Фактически, уравнение (1) – это условие сферического движения твердого тела. Уравнение (2) – это основное уравнение вращательного движения, в правой части которого помимо момента силы трения и момента, описывающего действие внешнего поля, присутствует слагаемое, пропорциональное производной от намагниченности, проистекающее из условия сохранения полного момента импульса. Именно оно и составляет отличие уравнения (2) от аналога, часто используемого для описания вращения жесткого диполя. Уравнение же (3) совпадает с уравнением Ландау-Лифшица-Гильберта с точностью до слагаемого, пропорционального $\mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$, которое исключает компоненту \mathbf{M} , вращающуюся вместе с кристаллической решеткой. Далее предполагаем, что на частицу действует внешнее циркулярно-поляризованное однородное поле в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_x H \cos \Omega t + \mathbf{e}_y H \sigma \sin \Omega t, \quad (5)$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ – орты Декартовой системы координат, H – амплитуда поля, Ω – его частота, t – время, а $\sigma (= \pm 1)$ – это множитель, определяющий направление поляризации поля.

Уравнения (1)-(3) записаны в т.н. динамическом приближении, когда тепловые флуктуации не принимаются во внимание. Такое предположение справедливо, если выполняется ряд условий. Во-первых, магнитная энергия должна быть много больше тепловой энергии: $\kappa \gg 1$, $\kappa = MHV/k_B T$, где k_B ($\approx 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К) – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура. Так, например, для частичек магхемита [8] со средним радиусом $R = 20$ нм, намагниченностью $M = 338$ едц, полем анизотропии $H_a = 910$ Ое, при температуре $T = 311$ К и амплитуде поля $H = 0.05 \cdot H_a$, условие такого соотношения магнитной и тепловой энергии выполняется: $\kappa \approx 12$.

Выводя требования к амплитуде поля или размеру частицы, важно синхронизировать их с требованиями к частоте. Даже если условие $\kappa \gg 1$ выполняется, имеют место как случайные отклонения магнитного момента относительно кристаллической решетки, так и случайные изменения угловых координат всей частицы. И если достаточно существенная тепловая флуктуация весьма вероятна за один период изменения поля, тогда динамическое приближение становится неправомерным. Характерным временем, за которое может произойти существенное, индуцированное тепловым

шумом изменение, является время релаксации. Как следствие, для механического вращения минимальная частота поля должна определяться временем Броуновской релаксации $\Omega_B = 1/\tau_B = k_B T/(3\eta V)$, а для процессов перемангничивания – временем релаксации Нееля $\Omega_N = 1/\tau_N = (\pi\kappa)^{1/2} \cdot (2\alpha\gamma H_a) \cdot \exp(-\kappa)$ [9]. Тогда, результирующее требование к частоте внешнего поля формулируем как $\Omega \gg \max[\Omega_B, \Omega_N]$. Для вышеупомянутых наночастиц магхемита, принимая $\alpha = 0.02$, а, также, крови как вязкого носителя $\eta = 0.05$ Р при температуре $T = 311$ К, получаем $\Omega_B \approx 8.54 \cdot 10^3$ Hz, $\Omega_N \approx 7.61 \cdot 10^3$ Hz. Следовательно, частота должна быть в диапазоне не ниже сотен кГц: $\Omega \gg 10^4$ Hz, что является вполне приемлемым для большинства применений феррожидкостей, в том числе, для магнитной гипертермии [10].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В случае реализации прецессионного режима наночастица вращается синхронно с полем (5) (см. Рис. 1). Стационарные решения уравнений (1)-(3) в этом случае следует искать в виде

$$\varphi = \alpha\Omega t - \varphi_1, \quad \vartheta = \vartheta_1, \quad (6)$$

$$\phi = \alpha\Omega t - \phi_1, \quad \theta = \theta_1, \quad (7)$$

где φ, ϑ – сферические координаты магнитного момента \mathbf{M} , ϕ, θ – сферические координаты легкой оси \mathbf{n} , ϑ_1, θ_1 – углы прецессии векторов \mathbf{M} и \mathbf{n} соответственно, φ_1, ϕ_1 – углы отставания от внешнего поля векторов \mathbf{M} и \mathbf{n} соответственно. Особенностью прецессионного режима будет отсутствие движения \mathbf{m} относительно кристаллической решетки, а, значит, будет справедливым условие

$$\dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} = 0. \quad (8)$$

Подстановкой выражений (8) и (3) в (2) с учетом (4) получаем

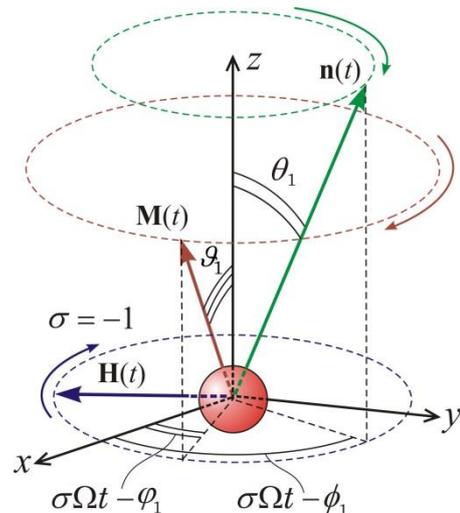


Рис. 1 – Схематическое изображение синхронного вращения внешнего поля, наночастицы и ее магнитного момента

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -H_a M^{-1} V (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) - 6\eta V \boldsymbol{\omega}. \quad (9)$$

Для упрощения последующих вычислений перейдем в систему координат $x''y''z''$, которая вращается вместе с легкой осью, причем $\mathbf{n}'' = \mathbf{e}_{z''}$. Согласно приложению в работе [2], в этой системе координат выполняется условие $\dot{\mathbf{n}}'' = \rho \Omega \sin \theta_1 \mathbf{e}_{y''}$. Найдем угловую скорость $\boldsymbol{\omega}''$ в дважды штрихованной системе координат путем подстановки последнего выражения в (1)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{y''} \sigma \Omega \sin \theta_1 &= \mathbf{e}_{x'} \omega_{y'} - \mathbf{e}_{y'} \omega_{x'} \Rightarrow \\ \boldsymbol{\omega}'' &= (-\sigma \Omega \sin \theta_1, 0, 0). \end{aligned} \quad (10)$$

К сожалению, уравнение (3) не может быть записано во вращающейся системе, поэтому воспользоваться результатом (10) можно лишь переводом его в лабораторную систему координат. Для этого введем матрицы поворота, происхождение которых помогает понять рисунок 2, как

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) & -\sin(\sigma \Omega t - \phi_1) & 0 \\ \sin(\sigma \Omega t - \phi_1) & \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицы поворота, согласно которым осуществляются переходы от вращающейся системы $x''y''z''$ к лабораторной $xzyz$ определяются в виде

$$C^{-1} = A^{-1} B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) \cos \theta_1 & -\sin(\sigma \Omega t - \phi_1) \cos \theta_1 & \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) \sin \theta_1 \\ \sin(\sigma \Omega t - \phi_1) \cos \theta_1 & \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) \sin \theta_1 & \sin(\sigma \Omega t - \phi_1) \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно вектор $\boldsymbol{\omega}$ и его производная в лабораторной системе координат запишутся как

$$\boldsymbol{\omega} = C^{-1} \boldsymbol{\omega}'' = \begin{pmatrix} -\sigma \Omega \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ -\sigma \Omega \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ \Omega \sin^2 \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} \Omega^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ -\Omega^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

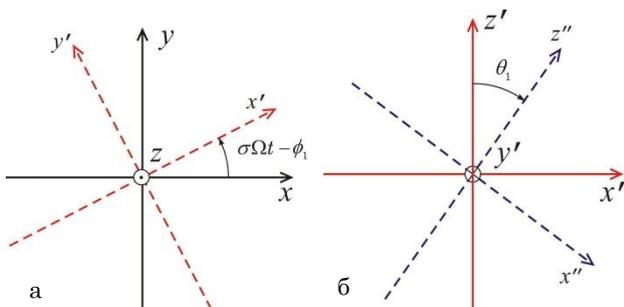


Рис. 2 – Вращающаяся система координат: поворот вокруг оси oz (а), с последующим поворотом вокруг oy' (б)

Наконец, представим векторы \mathbf{M} и \mathbf{n} , как и их производные, в системе $xzyz$ с учетом (6) и (7)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M \sin \vartheta_1 \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ M \sin \vartheta_1 \sin(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ M \cos \vartheta_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} -\sigma \Omega M \sin \vartheta_1 \sin(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ \sigma \Omega \sin \vartheta_1 \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ \sin \theta_1 \sin(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = - \begin{pmatrix} -\sigma \Omega \sin \theta_1 \sin(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ \sigma \Omega \sin \theta_1 \cos(\sigma \Omega t - \phi_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

и введем обозначение

$$F = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \sin \theta_1 \sin \vartheta_1 \cos(\phi_1 - \phi_1) + \cos \vartheta_1 \cos \theta_1. \quad (17)$$

Подставим выражения (5), (11)-(17) в (2), приравняем выражения в правой и левой частях при одинаковых ортах. Далее результат, полученный для \mathbf{e}_x , умножим на $\cos \sigma \Omega t$, а результат для \mathbf{e}_y – на $\sin \sigma \Omega t$. Сложив найденные равенства и упростив результат, получим

$$MV \sin \vartheta_1 \sin \phi_1 (\sigma \Omega / \gamma - H_{0z}) = -\Omega \sin \theta_1 \cos \theta_1 (J \Omega \sin \phi_1 + 6V \eta \sigma \cos \phi_1). \quad (18)$$

Здесь H_{0z} – постоянное поле, направленное вдоль оси oz . Приравнивание при \mathbf{e}_z напрямую дает

$$MH \sin \vartheta_1 \sin \phi_1 = 6\eta \Omega^2 \sin^2 \theta_1. \quad (19)$$

Аналогичные операции с уравнением (9) позволяют получить

$$MVH_a F \sin(\vartheta_1 - \theta_1) \sin \phi_1 = -\Omega \sin \theta_1 \cos \theta_1 (J \Omega \sin \phi_1 + 6V \eta \sigma \cos \phi_1), \quad (20)$$

$$MH_a F \sin \vartheta_1 \sin(\phi_1 - \phi_1) = -6\eta \Omega^2 \sin \theta_1. \quad (21)$$

Фактически, мы получили систему из четырех уравнений относительно неизвестных – угловых параметров $\theta_1, \phi_1, \vartheta_1, \phi_1$. Упростим полученную систему подстановкой соотношения (18) в (20), а соотношения (19) – в (21). В результате запишем

$$H_a F \sin(\vartheta_1 - \theta_1) \sin \phi_1 = \sin \vartheta_1 (\sigma \Omega / \gamma - H_{0z}), \quad (22)$$

$$H_a F \sin \theta_1 \sin(\phi_1 - \phi_1) = H \sin \phi_1 \quad (23)$$

Таким образом, составляющими результирующей системы будем рассматривать уравнения (18), (19), (22), (23).

Точные решения такой системы можно получить лишь численно, однако определенные свойства решений следуют уже из самой системы. Так, из (22)

следует, что $\phi_1 > \varphi_1$, а из (23) – что $\vartheta_1 < \theta_1$ для поля, поляризованного против часовой стрелки ($\sigma = -1$) и отсутствия поля вдоль оси oz . Далее, из (18) следует, что $\theta_1 > \pi/2$ при $\sigma = -1$ и $H_{0z} = 0$. Во-первых, это замыкает цепь рассуждений о том, что в прецессионном режиме угол между векторами \mathbf{M} и \mathbf{H} будет всегда меньше, чем угол между \mathbf{n} и \mathbf{H} . Это означает, что результирующая мощность потерь, которая растет с ростом угла между \mathbf{M} и \mathbf{H} будет тем меньше, чем меньше поле анизотропии. Ввиду отсутствия движения магнитного момента относительно кристаллической решетки, дополнительные потери за счет магнитной динамики будут отсутствовать, поэтому такое снижение не сможет быть скомпенсированным даже теоретически. Во-вторых, в случае конечной анизотропии можно говорить о наличии некоторого индуцированного полем типа (5) эффективного поля вдоль оси oz , равного $\sigma\Omega/\gamma$, направление которого зависит от поляризации \mathbf{H} . При приближении частоты к частоте ферромагнитного резонанса, такое эффективное поле будет сравнимым с полем анизотропии. Это индуцированное поле способно существенно влиять на коллективную динамику ансамбля ферромагнитных наночастиц во вращающемся поле, поскольку будет являться своеобразным подмагничивающим фактором, который в результате определит направление результирующего дипольного поля. Поэтому применение модели замороженного магнитного момента может качественно исказить гистерезисные свойства ансамблей наночастиц.

В то же время, остаются открытыми вопросы об устойчивости прецессионного движения (как в случае с динамикой магнитного момента в неподвижной частице [2]), о возможных других классах решений уравнений (1)-(3) и о переходах между ними [11]. Эти вопросы требуют обстоятельного дальнейшего численного анализа поведения системы. На текущий момент можно говорить, что предварительное численное моделирование подтверждает наличие устойчивого прецессионного режима, а, также, качественных его характеристик.

4. ВЫВОДЫ

Используя уравнения движения, полученные исходя из закона сохранения полного момента импульса и учитывающие относительность движения магнитного

момента в релаксационном слагаемом [7] для описания совместной магнитной и механической вращательной динамики ферромагнитной наночастицы, мы описали прецессионный режим движения, индуцированный циркулярно-поляризованным внешним магнитным полем вида (5). Основной методический прием нашего подхода заключался в нахождении вектора угловой скорости во вращающейся вместе с частицей системе координат, где данный вектор имеет наиболее простую форму, с последующим переводом в лабораторную систему координат.

В результате, мы получили алгебраическую систему уравнений относительно углов прецессии и углов отставания магнитного момента и легкой оси, которая соответствует исходным уравнениям движения. Основные свойства решения следующие. 1. Магнитный момент всегда составляет меньший угол с вращающимся полем, чем ось анизотропии. Как следствие – уменьшение потерь энергии с уменьшением эффективного поля анизотропии. 2. Наличие эффективного постоянного поля, равного $\sigma\Omega/\gamma$ (σ – фактор, определяющий направление поляризации, Ω – частота поля, γ – гиромагнитное отношение), перпендикулярного плоскости поляризации, направление которого связано с направлением вращения поля правого винта. Такое поле по модулю будет стремиться к полю анизотропии при приближении частоты к частоте ферромагнитного резонанса и может оказывать существенное влияние на коллективную динамику ферромагнитных наночастиц в жидкости.

Результаты, полученные в работе, имеют теоретическое и методическое значение как важный шаг в микроскопическом описании свойств феррожидкости. Прецессионный режим может служить отправным тестовым примером для аппарата последующего численного стохастического описания как динамики одной частицы, так и коллективной динамики ансамбля частиц. Важный прикладной аспект представленных результатов состоит в наличии более точного аналитического инструмента оценки скорости нагревания феррожидкости с помощью внешнего переменного поля в процессе магнитной гипертермии [10] – перспективного метода терапии раковых опухолей.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят за финансовую поддержку Министерство образования и науки Украины, проект № 0116U002622.

Precession of a Fine Magnetic Particle with Finite Anisotropy in a Viscous Fluid

T.V. Lyuty, O.M. Hryshko, A.A. Kovner, E.S. Denisova

Sumy State University, 2, Rimsky Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine

In this paper, the magnetic dynamics and mechanical rotation about the center of mass of a uniaxial ferromagnetic fine particle in a viscous liquid are described using the classical approach. In particular, the synchronous rotation of the magnetization vector and unit vector, associated with the anisotropy axis, together with a circularly polarized external magnetic field is considered. The feature of this mode for the given system is that both the magnetization and anisotropy axis do not lie in the plane of the field polarization. This fact is explained by the presence of effective permanent field, perpendicular to the polarization plane. Obtained results allow to perform more realistic evaluations of the power loss of an external field interacting with a ferromagnetic fluid.

Keywords: Fine magnetic particle, Equation of motion, Precession, Effective field.

Прецесія ферромагнітної наночастинки зі скінченною анізотропією у в'язкій рідині

Т.В. Лютий, О.М. Гришко, А.А. Ковнер, О.С. Денисова

Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007 Суми, Україна

В роботі за допомогою класичного підходу описується магнітна динаміка і механічне обертання навколо центру мас одноосової ферромагнітної наночастинки, зваженої у в'язкій рідині. Зокрема, розглядається синхронне обертання векторів магнітного моменту і орта, пов'язаного з віссю легкого намагнічування разом з циркулярно-поляризованим зовнішнім магнітним полем. Особливість такого режиму для даної системи полягає в тому, що як магнітний момент, так і вісь легкого намагнічування не будуть лежати в площині поляризації поля. Даний факт пояснюється наявністю ефективного постійного поля, перпендикулярного до площини поляризації. Одержані результати дозволяють проводити більш реалістичні оцінки потужності втрат зовнішнього поля, що взаємодіє з ферромагнітною рідиною.

Ключові слова: Ферромагнітна наночастинка, Рівняння руху, Прецесія, Ефективне поле.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. R. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, (Cambridge University Press: 1985).
2. S.I. Denisov, T.V. Lyutyu, P. Hänggi, K.N. Trohidou, *Phys. Rev. B* **74**, 104406 (2006).
3. Yu.L. Raikher, V.I. Stepanov, *J. Exp. Theor. Phys.* **112**, 173 (2011).
4. Haiwen Xi, Kai-Zhong Gao, Yiming Shi, Song Xue, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **39**, 4746 (2006).
5. H. Mamiya, B. Jeyadevan, *Sci. Rep.* **1**, 157 (2011).
6. N.A. Usov, B.Ya. Liubimov, *J. Appl. Phys.* **112**, 023901 (2012).
7. K.D. Usadel, C. Usadel, *J. Appl. Phys.* **118**, 234303 (2015).
8. M. Ibrahim Dar, S.A. Shivashankar, *RSC Adv.* **4**, 4105 (2014).
9. R.E. Rosensweig, *J. Magn. Magn. Mat.* **252**, 370 (2002).
10. A. Jordan, R. Scholz, P. Wust, H. Fahling, R. Felix, *J. Magn. Magn. Mat.* **201**, 413 (1999).
11. T.V. Lyutyu, A.Yu. Polyakov, A.V. Rot-Serov, C. Binns, *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 396002 (2009).