

## О частотных характеристиках электрических полей цилиндрической пьезокерамической антенны с экраном в виде незамкнутого кольцевого слоя

З.Т. Гусак, А.Г. Лейко

Государственное предприятие «Киевский научно-исследовательский институт гидроприборов»,  
ул. Сурикова, 3, 03035 Киев, Украина

(Получено 04.12.2015; опубликовано online 15.03.2016)

Строгим методом «связанных» полей получены аналитические выражения для описания электрических полей пьезокерамических цилиндрических антенн с экранами в виде незамкнутого кольцевого слоя конечной толщины. В результате численного анализа установлены количественные связи и особенности частотных характеристик электрического тока и входного сопротивления антенн с экранами в зависимости от параметров составляющих антенны элементов.

**Ключевые слова:** Электрическое поле, Цилиндрическая пьезокерамическая оболочка, Экран, Незамкнутый кольцевой слой, Связанные поля.

DOI: [10.21272/jnep.8\(1\).01029](https://doi.org/10.21272/jnep.8(1).01029)

PACS number: 43.38. + n

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Любая эхолокационная система состоит из двух частей – антенны и радиоэлектронной аппаратуры, включающей в себя различные электронные устройства. Особенность гидролокационной системы состоит в том, что, в отличие от радиолокационной, её антенна осуществляет не только формирование поля локации в окружающем пространстве, но и преобразование одного вида энергии в другой, в частности, электрической энергии в акустическую в режиме излучения. В связи с этим электрические характеристики гидроакустической антенны формируются в результате нескольких видов взаимодействия, а именно, взаимодействий излучателей антенны со средой и взаимодействия их в антенной решетке по акустическому полю в процессе формирования антенной поля локации и взаимодействия физических полей – электрического, механического и акустического в излучателях в процессе преобразования электрической энергии в акустическую [1]. Если учесть при этом, что эффективное преобразование энергии в излучателях может осуществляться только на частоте их механического резонанса [2], а сами антенны в процессе локации могут иметь существенно различные режимы излучения энергии, например, круговой или секторный, то становится обоснованным тот широкий разброс величин входных электрических характеристик антенн, который имеет место в гидроакустике [3].

При этом математические трудности аналитического решения задач определения количественных характеристик электрических полей излучателей и антенн в целом с учетом перечисленных видов взаимодействия обусловили практическое отсутствие численных результатов по электрическим полям гидроакустических антенн. Имеющихся данных [4, 5] очень мало и получены они приближенными методами, в частности, методом эквивалентных электромеханических схем [6] для отдельных вариантов построения одиночных пьезокерамических преобразователей энергии.

Отсутствие таких результатов не позволяет обеспе-

чить создание генераторных устройств необходимым объемом количественных данных по входным электрическим характеристикам гидроакустических антенн.

С другой стороны, несмотря на существенное развитее путей и средств построения генераторных устройств передающих трактов систем гидролокации не удаётся создать электронные устройства, позволяющие получить управляемые в широком диапазоне изменений их входные параметры [3]. К тому же ситуация осложняется возрастающими требованиями к сигналам гидролокации в части их широкополосности и амплитудно-фазового распределения по каналам антенн.

В связи с изложенным задача согласования выходных параметров генераторных устройств передающих трактов и входных параметров гидроакустических антенн после ухода от ламповых схем построения генераторов и перехода на пьезокерамические излучатели превратилась в трудно разрешимую проблему.

Целью данной работы является представление одного из подходов для решения существующей проблемы на основе строгих методов применительно к одному из наиболее простых вариантов построения гидроакустической антенны в виде цилиндрического пьезокерамического излучателя с акустическим экраном в виде незамкнутого кольцевого слоя конечной толщины.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определим электрическое поле круговой цилиндрической антенны (рис. 1), образованной из цилиндрического пьезокерамического излучателя 1 с окружной поляризацией и акустического экрана 2, представляющего собой незамкнутый кольцевой слой материала конечной толщины, охватывающего излучатель. Внутренняя полость пьезокерамической оболочки излучателя со средним радиусом  $r_0$  и толщиной  $h$  может быть вакуумирована, заполнена газом или жидкостью с плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c_1$ . При окружной поляризации цилиндрическая оболочка рассматривается как кусочно-

однородное электроупругое тело, образованное из жестко склеенных между собой  $N$  пьезокерамических призм, включенных параллельно. К электродам призм подводится гармонически изменяющееся во времени электрическое напряжение  $\psi = \psi_0 e^{-i\omega t}$  частотой  $\omega$ . Экран 2 выполнен из акустически мягкого материала. Антенна располагается в среде с плотностью  $\rho_2$  и скоростью звука  $c_2$ .

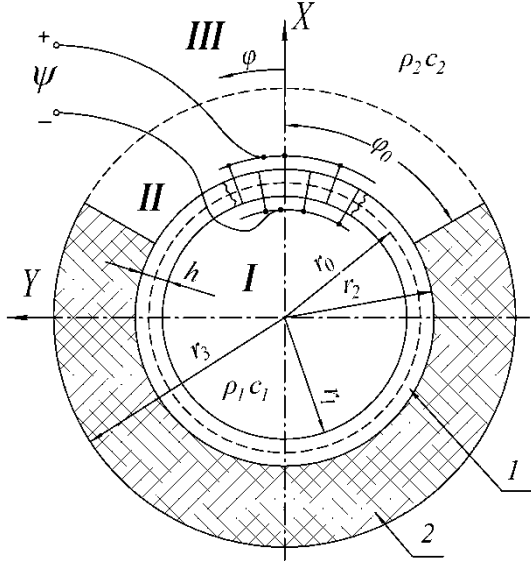


Рис. 1 – Нормальное сечение антенны с экраном

Для решения задачи введем (рис. 1) декартову систему координат  $OXYZ$ , ось  $OZ$  которой направим вдоль продольной оси пьезокерамической оболочки, а ось  $OX$  – вдоль биссектрисы угла  $2\varphi_0$  раскрыва экрана, и связанную с ней круговую цилиндрическую систему координат. Тогда электрическое поле пьезокерамической антенны может быть определено через совместное решение:

- уравнений вынужденной электростатики для пьезокерамики:

$$\vec{E} = -\text{grad}\psi, \text{div}\vec{D} = 0;$$

- уравнений движения тонких оболочек с окружающей поляризацией в перемещениях:

$$(1 + \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} = \alpha \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \beta \left( \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) - w + \frac{e_{33}}{C_{33}^E} r_0 E_\varphi + \frac{\alpha}{h} q_r = \alpha \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (1)$$

- уравнения Гельмгольца, описывающего движение сред внутри и вне излучателя:

$$\Delta \Phi + k_i^2 \Phi = 0.$$

Здесь:  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  – векторы напряженности и индукции электрического поля;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\Phi$  – потенциал скорости;  $k_i$  – волновые числа внешней и внутренней сред;  $u$ ,  $w$  – окружная и радиальная составляющие вектора смещений точек

срединной поверхности оболочки;

$$\beta = \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E \epsilon_{33}^S} \right); \quad \alpha = \frac{r_0^2}{C_{33}^E}; \quad q_r \text{ – внешняя}$$

нагрузка;  $C_{33}^E$ ,  $\epsilon_{33}^S$ ,  $e_{33}$  – соответственно модуль упругости при нулевой электрической напряженности, диэлектрическая проницаемость при нулевой деформации, пьезоконстанта;  $\gamma$  – плотность материала пьезокерамической оболочки излучателя.

Акустические граничные условия принимают вид:

$$\Phi = 0, |\varphi| = \varphi_0; \quad r_2 \leq r \leq r_3; \quad (2)$$

$$\Phi = 0, \varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi; \quad r = r_3;$$

Электрические условия состоят в задании напряженности электрического поля в пьезокерамической оболочке:

$$E_\varphi = -\frac{\psi_0 N}{2\pi r_0} \quad (3)$$

### 3. ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Для решения задачи разобьем всю область существования физических полей пьезокерамической антенны с экраном на три частичные области (рис. 1). Тогда полная система исходных соотношений задачи включает в себя следующие кинематические и динамические условия сопряжения полей на границах раздела областей:

$$-\frac{\partial \Phi_I}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad 0 \leq |\varphi| \leq \pi, \quad r = r_1;$$

$$-\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad 0 \leq |\varphi| \leq \varphi_0, \quad r = r_2;$$

$$q_r = -\left( \rho_2 \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \Phi_I}{\partial t} \right), \quad 0 \leq |\varphi| \leq \varphi_0, \quad r = r_2; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r}, \quad |\varphi| \leq \varphi_0, \quad r = r_3;$$

$$\Phi_{III} = \Phi_{II}, \quad |\varphi| \leq \varphi_0, \quad r = r_3.$$

где  $\Phi_I$ ,  $\Phi_{II}$  и  $\Phi_{III}$  – потенциалы скоростей акустического поля в соответствующих частичных областях.

Представим искомые величины  $u$ ,  $w$ ,  $\Phi_I$ ,  $\Phi_{II}$  и  $\Phi_{III}$  разложениями в ряды по соответствующим функциям:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\varphi); \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos(n\varphi);$$

$$\Phi_I = \sum_{m=0}^{\infty} E_m J_m(kr) \cos(m\varphi); \quad (5)$$

$$\Phi_{II} = \sum_{q=0}^{\infty} \left( A_q J_{m_q}(kr) + B_q N_{m_q}(kr) \right) \cos(m_q\varphi);$$

$$\Phi_{III} = \sum_{s=0}^{\infty} F_s H_s^{(1)}(kr) \cos(s\varphi);$$

Здесь  $J_m(kr)$ ,  $N_{m_q}(kr)$ ,  $H_s(kr)$  – традиционные обозначения функций Бесселя, Неймана и Ханкеля;

$m_q$  определяется из первого граничного условия системы (2) и равно  $m_q = (2q + 1)\pi / 2\varphi_0$ .

Алгебраизация систем функциональных уравнений (1), (2) и (4) на основе соотношений (3) и (5) и свойств полноты и ортогональности собственных угловых функций на соответствующих интервалах

позволяет получить для определения неизвестных коэффициентов разложений  $u_n$ ,  $w_n$ ,  $E_m$ ,  $A_q$ ,  $B_q$  и  $F_s$  следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} w_n \left( R_n + \frac{\alpha\omega\rho_1 c_1}{h} \frac{J_n(k_1 r_1)}{J_n'(k_1 r_1)} \right) N_n - i\omega \frac{\alpha}{h} \rho_2 \sum_{q=0}^{\infty} \left[ A_q J_{m_q}(k_2 r_2) + B_q N_{m_q}(k_2 r_2) \right] N_{nq} = -\frac{e_{33}^E \psi_0 N}{C_{33}^E 2\pi} b_n; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \left[ A_q J_{m_q}'(k_2 r_2) + B_q N_{m_q}'(k_2 r_2) \right] N_q - ic_2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n N_{nq} = 0; \quad q = 0, 1, 2, 3, \dots \\ F_s H_s^{(1)}(k_2 r_3) N_s - \sum_{q=0}^{\infty} \left[ A_q J_{m_q}(k_2 r_3) + B_q N_{m_q}(k_2 r_3) \right] N_{sq} = 0; \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \left[ A_q J_{m_q}'(k_2 r_3) + B_q N_{m_q}'(k_2 r_3) \right] N_q - \sum_{s=0}^{\infty} F_s H_s^{(1)'}(k_2 r_3) N_{sq} = 0; \quad q = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (6)$$

Здесь:

$$R_n = \frac{\alpha^2 \gamma^2 \omega^4 - \alpha \gamma \omega^2 (1 + \beta n^2) (n^2 + 1) + \beta n^2 (n^2 - 1)^2}{\alpha \gamma \omega^2 - (1 + \beta) n^2};$$

$$N_n = 2 \int_0^{\pi} \cos^2(n\varphi) d\varphi; \quad N_q = 2 \int_0^{\varphi_0} \cos^2(m_q \varphi) d\varphi;$$

$$N_{nq} = 2 \int_0^{\varphi_0} \cos(n\varphi) \cos(m_q \varphi) d\varphi; \quad b_n = 2 \int_0^{\pi} \cos(n\varphi) d\varphi;$$

штрих означает производную функции.

Бесконечная система (6) является исходной для получения количественных данных об электрических полях пьезокерамической антенны с экраном. В качестве параметров, характеризующих эти поля, были приняты частотные зависимости электрического тока в цепи возбуждения антенны и её входного электрического сопротивления. Анализ схемы построения антенны (рис.1) показывает, что размещение цилиндрической оболочки в незамкнутом кольцевом экранирующем слое нарушает радиальную симметрию колебаний оболочки. Следствием неоднородности углового распределения колебаний по поверхности оболочки является соответствующая привязка величины тока, создаваемого различными секциями-призмами оболочки, к угловому положе-

нию этих призм в излучателе антенны.

В связи с изложенным выражение для электрического тока  $I$  антенны приобретает вид:

$$I = S_{эл} \sum_{j=1}^N \frac{\partial D_{\varphi}^{(j)}}{\partial t} \quad (7)$$

где  $S_{эл}$  – площадь электрода, нанесенного на боковую поверхность пьезоэлектрической призмы,  $D_{\varphi}^{(j)}$  – электрическая индукция  $j$ -той призмы. Согласно [4], при окружной поляризации в цилиндрической пьезокерамической оболочке для  $j$ -той призмы радиальная  $D_r^{(j)}$ , осевая  $D_z^{(j)}$  и окружная  $D_{\varphi}^{(j)}$  составляющие электрической индукции определяются выражениями:

$$D_r^{(j)} = 0, \quad D_z^{(j)} = 0,$$

$$D_{\varphi}^{(j)} = \varepsilon_{33}^{S(j)} E_{\varphi}^{(j)} + e_{31}^{(j)} (\varepsilon_r^{(j)} + \varepsilon_z^{(j)}) + e_{33}^{(j)} \varepsilon_{\varphi}^{(j)},$$

где

$$\varepsilon_r^{(j)} = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_z^{(j)} = 0, \quad \varepsilon_{\varphi}^{(j)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{w}{r}$$

и:

$$\frac{\partial D_{\varphi}^{(j)}}{\partial t} = -i\omega \left\{ -\varepsilon_{33}^{S(j)} \frac{\psi_0 N}{2\pi r_0} + \frac{e_{33}^{(j)}}{r_0} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n u_n \cos\left(n \frac{2\pi j}{N}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos\left(n \frac{2\pi j}{N}\right) \right] \right\} \quad (8)$$

С учетом соотношений (7) и (8) полный ток в цепи возбуждения пьезокерамической антенны с экраном определяется соотношением:

$$I = -i\omega S_{эл} \left\{ -\varepsilon_{33}^S \frac{\psi_0 N^2}{2\pi r_0} + \frac{e_{33}}{r_0} \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n u_n \cos\left(n \frac{2\pi j}{N}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos\left(n \frac{2\pi j}{N}\right) \right] \right\}$$

Входной электрический импеданс антенны с экраном определяется законом Ома.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Полученные соотношения явились исходными для численного анализа частотных характеристик электрических полей пьезокерамической антенны с экраном рассматриваемого типа.

Расчеты выполнялись для антенн с такими характеристиками и параметрами: пьезокерамика состава ЦТБС-3 с плотностью  $\gamma = 7210$  (кг/м<sup>3</sup>), пьезомодулем  $d_{33} = 286 \cdot 10^{-12}$  (Кл/Н), диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_{33}^S = 1280 \cdot \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  (Ф/м) – диэлектрическая проницаемость вакуума, и модулем

упругости  $C_{33}^E = 13.6 \cdot 10^{10}$  (Н/м<sup>2</sup>); средний радиус пьезокерамической оболочки  $r_0 = 0.068$  (м) при толщине стенки  $h = 0.008$  (м) и количестве призм  $N = 48$ ; среда заполнения внутренней полости оболочки – вакуум ( $\rho_1 c_1 = 0$ ), воздух ( $\rho_1 c_1 = 419.1$  кг/м<sup>3</sup>) и жидкость ( $\rho_1 c_1 = 1.5 \cdot 10^6$  кг/м<sup>3</sup>,  $0.8 \rho_1 c_1$ ,  $0.5 \rho_1 c_1$ ); угол раскрыва экрана  $\varphi_0 = 90^\circ, 150^\circ$  при толщине экрана  $r_3 - r_2 = 0.005$  (м) и материале – звукоотражающей резине 51-1415. Внешняя среда – вода ( $\rho_2 c_2 = 1.5 \cdot 10^6$  кг/м<sup>3</sup>). Напряжение возбуждения составляло  $\psi_0 = 200$  В. Результаты расчетов приведены на единицу высоты антенны.

Анализ частотных зависимостей электрического тока (рис. 2) показывает, что величина тока существенно зависит от диапазона частот. В области низких частот она мала и практически не зависит ни от характера среды, заполняющей внутреннюю полость пьезокерамической оболочки, ни от угла раскрыва экрана. При приближении к частотам механических резонансов антенны величины электрического тока существенно возрастают. При этом заполненная воздухом пьезокерамическая оболочка отличается от вакуумированной тем, что в частотной зависимости её тока появляются локальные узкополосные резонансы, обусловленные резонансными колебаниями её воздушной полости. Заполнение этой полости жидкостью приводит к значительному расширению полосы частот с большой величиной электрического тока. Определенное влияние на эти процессы демонстрирует и изменение угла раскрыва  $\varphi_0$  экрана. Указанные частотные особенности являются количественным подтверждением

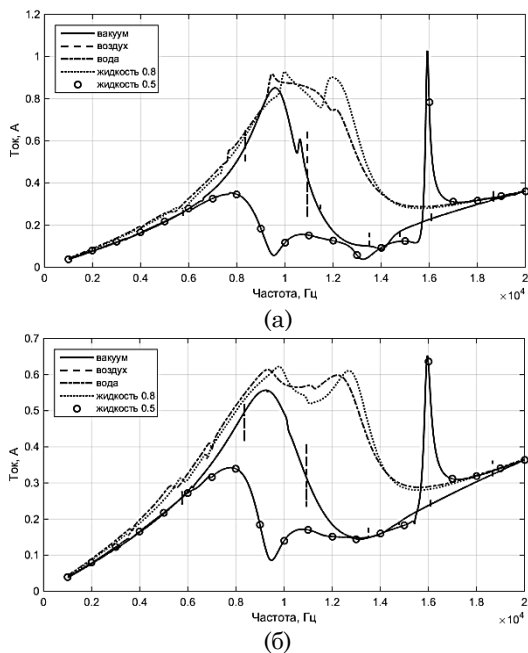


Рис. 2 – Частотная зависимость электрического тока антенны при углах  $\varphi_0 = 90^\circ$  (а),  $150^\circ$  (б)

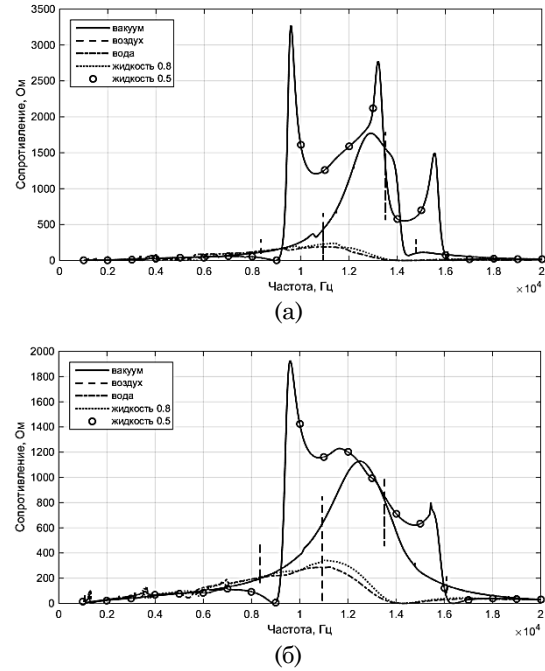


Рис. 3 – Частотная зависимость активной составляющей входного электрического сопротивления антенны при углах  $\varphi_0 = 90^\circ$  (а),  $150^\circ$  (б)

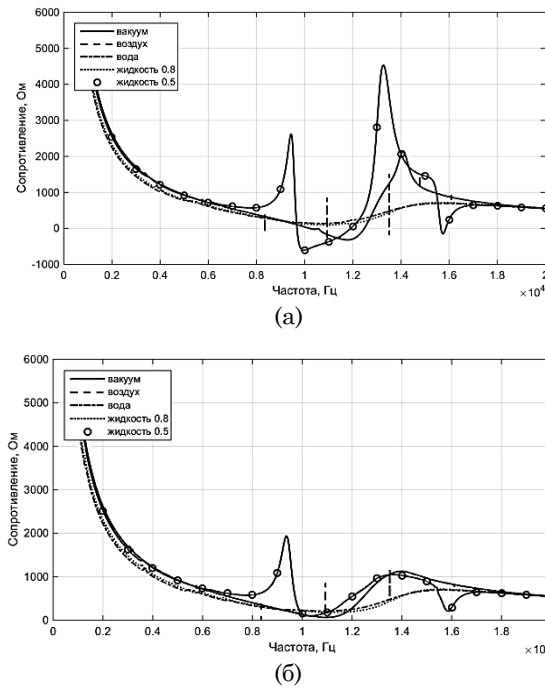


Рис. 3 – Частотная зависимость реактивной составляющей входного электрического сопротивления антенны при углах  $\varphi_0 = 90^\circ$  (а),  $150^\circ$  (б)

связанности электрических, механических и акустических волновых процессов, происходящих в пьезокерамических антеннах рассматриваемого типа.

Анализ частотных зависимостей составляющих (рис. 3, 4) входного электрического сопротивления антенны показывает, что на низких частотах антенна ведет себя как конденсатор с потерями, поскольку с ростом частоты ёмкостное сопротивление антенны

уменьшается. Однако, начиная с некоторой области частот, все большее влияние приобретают эффекты электрострикции пьезокерамики, приводящие к резонансным явлениям в сложных колебательных системах «внешняя среда – оболочка – внутренняя среда», какими являются антенны рассматриваемого типа. Именно их наличием объясняется существенное увеличение активной составляющей (рис. 3) входного сопротивления антенны, а следовательно, и излучаемой ею мощности, в определенных частотных диапазонах. Они же являются и причиной изменения ёмкостного характера реактивности антенны на индуктивный (рис. 4а) на отдельных участках частот. Наличие или отсутствие этих участков и их частотная протяженность зависят от типа пьезокерамики, параметров оболочки и заполняющих её сред, а также от параметров экрана.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Строгим методом «связанных» полей получены аналитические соотношения, описывающие электрические поля круговых цилиндрических антенн с экраном в виде незамкнутых кольцевых слоёв конечной толщины. Путём анализа частотных свойств антенн показано, что электрическое поле пьезокерамической антенны с экраном в области низких частот соответствует полю конденсатора с потерями, а в области высоких частот имеет динамическую составляющую, являющуюся результатом электрострикции пьезокерамики. Именно эта динамическая составляющая отображает определяющее влияние на электрическое поле антенны таких её характеристик как материалы и параметры пьезокерамической оболочки, внутренней среды и акустического экрана.

## About Frequency Characteristics of Electric Fields of Cylindrical Piezoceramic Antenna with Screen in the Form of an Open Ring Layer

Z.T. Gusak, A.G. Leiko

*State Enterprise «Kiyv Scientific Research Institute of Hydrodevices», 3, Surikova St., 03035 Kyiv, Ukraine*

According to rigorous method of “related” fields the analytical expressions to describe electric fields of piezoceramic cylindrical antennas with screen in the form of an open ring layer of finite thickness was obtained. As a result of numerical analysis the quantity relations and the features of frequency characteristics of the electric current and the input impedance of the antenna with screen depending on the parameters of the antenna elements were found.

**Keywords:** Electric field, Cylindrical piezo ceramic shell, Screen, Not closed annular layer, Related fields.

## Про частотні характеристики електричних полів циліндричної п'єзокерамічної антени з екраном у вигляді незамкнутого кільцевого шару

З.Т. Гусак, О.Г. Лейко

*Державне підприємство «Київський науково-дослідний інститут гідроапаратури»,  
вул. Сурикова, 3, 03035 Київ, Україна*

Строгим методом «зв'язаних» полів отримані аналітичні вирази для опису електричних полів п'єзокерамічної циліндричної антени з екраном у вигляді незамкнутого кільцевого шару кінцевої товщини. В результаті числового аналізу встановлені кількісні зв'язки та особливості частотних характеристик електричного струму та входного опору антен з екранами в залежності від параметрів елементів, з яких складаються антени.

**Ключові слова:** Електричне поле, Циліндрична п'єзокерамічна оболонка, Екран, Незамкнутий кільцевий шар, Зв'язані поля.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацьпура, *Волновые задачи акустики* (Київ: Інтерсервіс: 2013) (V.T. Grinchenko, S.V. Vovk, V.T. Matsapura, *Volnovyye zadachi akustiki* (Kyiv: Interservis: 2013)).
2. В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацьпура, *Основы акустики*. (Київ: Наукова думка: 2007) (V.T. Grinchenko, S.V. Vovk, V.T. Matsapura, *Osnovy akustiki* (Kiev: Naukova dumka: 2007)).
3. Ю.А. Корякин, С.А. Смирнов, Г.В. Яковлев, *Корабельная гидроакустическая техника: состояние и актуальные проблемы*. (Санкт-Петербург: Наука: 2004) (Yu.A. Koryakin, S.A. Smirnov, G.V. Yakovlev, *Korabel'naya gidroakusticheskaya tekhnika: sostoyaniye i akutsal'nyye preblemy*. (Sankt-Peterburg: Nauka: 2004)).
4. В.В. Богородский, Е.А. Коренин, В.И. Якушев, *Подводные электроакустические преобразователи. Справочник*

- (Ленинград: Судостроение: 1983) (V.V. Bogorodskiy, Ye.A. Korovin, V.I. Yakushev, *Podvodnyye elektroakusticheskiye preobrazovateli. Spravochnik* (Leningrad: Sudostroyeniye: 1983)).
5. O. Tetsuro, B.S. Aronov, D.A. Brown, *JASA* **121** No 6, 3465 (2007).
6. Б.С. Аронов, *Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики* (Ленинград: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ние: 1990) (B.S. Aronov, *Elektromekhanicheskiye preobrazovateli iz p'yezoelektricheskoy keramiki* (Leningrad: Energoatomizdat. Leningr. Otd-niye: 1990)).
7. В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга, *Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость* (Киев: Наукова думка:1989) (V.D. Grinchenko, A.F. Ulitko, N.A. Shul'ga, *Mekhanika svyazannykh poley v elementakh konstruksiy. T.5. Elektrouprugost'* (Kiev: Naukova dumka:1989)).