

Модернізований метод усереднених характеристик для розв'язування задач мультигармонічних резонансних взаємодій у пристроях сильнострумової електроніки

В.В. Куліш¹, О.В. Лисенко^{2,*}, Г.А. Олексієнко², Г.В. Биченко², О.А. Колоскова²

¹ Національний авіаційний університет, пр. Космонавта Комарова, 1, 03058 Київ, Україна

² Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007 Суми, Україна

(Одержано 27.01.2015; у відредагованій формі – 07.06.2015; опубліковано online 10.06.2015)

Проведено модернізацію методу усереднених характеристик на етапі побудови схеми асимптотичного інтегрування систем нелінійних диференціальних рівнянь, з урахуванням специфіки мультигармонічних резонансних взаємодій у пристроях сильнострумової електроніки. Отримано схеми асимптотичного інтегрування, що поєднують процедури прямого й зворотного переходів. Розглянуто як випадок однієї швидкої фази, так і випадок багатьох швидких фаз.

Ключові слова: Метод усереднених характеристик, Мультигармонічні параметричні резонанси, Релятивістські електронні пучки, Нелінійні рівняння, Рівняння в частинних похідних.

PACS numbers: 02.60.Cb, 41.60. – m, 52.35. – g

1. ВСТУП

Як відомо, самоузгоджену теорію нелінійних процесів у пристроях сильнострумової електроніки можна розділити на дві частини [1-6]. Перша з них є задачею руху заряджених частинок у заданих електромагнітних полях, друга — задача збудження електромагнітних полів зарядженими частинками при заданому русі. Вирішення обох цих задач дозволяє побудувати повну самоузгоджену картину взаємодії частинок з електромагнітними полями.

Для формування першої з вище згаданих задач, задачі руху, використовують у найбільш загальному випадку кінетичне рівняння [1-6]. У багатьох випадках для опису нелінійних процесів можна застосувати менш загальні, але більш прості квазігідродинамічні рівняння [1-6]. Як у випадку кінетичного, так і у випадку квазігідродинамічного опису використовують рівняння в частинних похідних.

Для вирішення задачі руху, яка описується рівняннями в частинних похідних, використовують різні методи [1-10]. Серед цих методів, що враховують специфіку нелінійних процесів у пристроях сильнострумової та плазмової електроніки, варто виділити метод усереднених характеристик [1, 2, 10]. З одного боку, цей метод включає в себе переваги плазмового підходу, а з іншого боку — базується на математично обґрунтованих асимптотичних схемах вирішення систем диференціальних рівнянь. Завдяки використанню асимптотичних схем інтегрування можна отримувати частину результатів, як в аналітичному вигляді, так і у вигляді добре адаптованому для методів чисельного аналізу.

Для формування другої з вище згаданих задач, задачі збудження електромагнітних полів, використовують рівняння Максвелла. Густина електричного струму й густини заряду, які входять у рівняння Максвелла, обчислюють, використовуючи рівняння руху. Рівняння Максвелла можна вирішувати різними способами, але найбільш часто у теорії сильнострумової електроніки застосовують метод повільно змінних амплітуд [1-7].

Якщо в досліджуваному пристрої поширюються хвилі з широким частотним спектром, то рівняння Максвелла зручно розкласти в ряди Фур'є й отримати диференціальні рівняння для амплітуд хвиль. Щоб таке розкладання можна було здійснити досить легко, густини електричних струмів і густини зарядів, які знаходяться за допомогою методу усереднених характеристик і входять у рівняння Максвелла, повинні бути представлені у вигляді фур'є-гармонік за такими самими фазами, якими характеризуються електромагнітні поля у досліджуваній системі. Відзначимо, що під час застосування методу усереднених характеристик відбувається перехід від неусереднених величин до усереднених, у тому числі, і до усереднених фаз. А усереднені й неусереднені фази є різними величинами. У методі усереднених характеристик після отримання розв'язків у вигляді функцій від усереднених величин здійснюється зворотний перехід до неусереднених величин, у тому числі, і до неусереднених фаз.

Аналізуючи загальну схему вирішення задач із мультигармонічними резонансними взаємодіями можна перекопатися у тому, що зворотний перехід від усереднених величин до неусереднених з метою використання отриманих розв'язків у рівняннях Максвелла можна проводити не для всіх величин, а тільки для деяких. Виявляється, що для більшості практично цікавих випадків достатньо здійснювати зворотний перехід тільки лише для швидких фаз, за якими відбувається розкладання в ряди Фур'є у рівняннях Максвелла. У зв'язку з цим, виникає наступне питання: чи можливо модернізувати схему асимптотичного інтегрування таким чином, щоб було можливо отримувати розв'язки, які б відразу залежали від неусереднених фаз без додаткового зворотного переходу. Зазначимо, така модернізація значно спростила б загальний алгоритм асимптотичного інтегрування та дозволила б збільшити ефективність методу усереднених характеристик. Саме цьому питанню й присвячена ця стаття.

* lysenko_@ukr.net

Стаття складається з двох частин. У першій частині наведено стислий виклад методу усереднених характеристик, у якому особлива увага приділена алгоритму асимптотичного інтегрування й проведенню зворотного переходу від усереднених величин до неусереднених. У другій частині викладено модернізований метод усереднених характеристик. У рамках модернізованого методу усереднених характеристик розглянуто два випадки, перший - випадок однієї швидкої фази, другий – випадок багатьох швидких фаз.

2. МЕТОД УСЕРЕДНЕНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Метод усереднених характеристик застосовується для асимптотичного інтегрування систем рівнянь у частинних похідних, які можна записати у стандартній формі [1, 2]

$$A'(U, z, t) \frac{\partial U}{\partial t} + \left(Z'(U, z, t) \times \frac{\partial}{\partial z} \right) U + C'(z, t) U = R'(U, z, t) \tag{1}$$

де A', Z', C', R' – квадратні матриці-функції розміром $n \times n$, компоненти матриці R' є слабко нелінійними періодичними функціями (у загальному випадку m -кратними); $U = U(z, t)$ – вектор-функція в Евклідовому n -мірному просторі; $z = \{z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n\}$, $z_i \in (-\infty, +\infty)$; t – деяка скалярна змінна, наприклад, лабораторний час.

Можна показати [1, 2], що рівняння у стандартній формі (1) можуть бути перетворені у лінійні відносно похідних рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial t} + Z(U, z, t) \frac{\partial U}{\partial z} = R(U, z, t), \tag{2}$$

де Z, R – квадратні матриці розміром $n \times n$.

Обчислювальну процедуру асимптотичного інтегрування рівнянь виду (2) за допомогою методу усереднених характеристик можна розбити на три етапи (рис. 1). На першому етапі перетворюємо вихідну систему рівнянь з частинними похідними до системи усереднених рівнянь k -го ієрархічного рівня. При цьому здійснюємо перехід до усереднених змінних й усуваємо з рівнянь швидкоосцилюючі змінні. На другому етапі знаходимо розв'язки усередненої системи рівнянь k -го ієрархічного рівня. На третьому етапі проводимо зворотне перетворення отриманих розв'язків на k -му ієрархічному рівні до початкового (нульового) рівня. Тобто, проводимо перетворення отриманих розв'язків, що залежать тільки від усереднених змінних, до розв'язків, що залежать від неусереднених змінних, у тому числі, і від швидкоосцилюючих змінних.

Розглянемо перший етап обчислювального алгоритму. Він містить у собі дві стадії (рис. 1). На першій стадії переходимо від вихідної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних (2) до її характеристик, які вже мають вигляд рівнянь у повних похідних:

$$\frac{dz}{dt} = Z(U, z, t); \quad \frac{dU}{dt} = R(U, z, t). \tag{3}$$

Як відомо, інтегрування рівнянь у повних похідних (3) є набагато простішим, ніж інтегрування рівнянь з частинними похідними (2). Однак, не дивлячись на значне спрощення, розв'язування системи рівнянь (3), особливо у випадку багатоперіодичних і багаторезонансних нелінійних процесів, виявляється не простою задачею. Тому на другій стадії (рис. 1) проводимо асимптотичне інтегрування рівнянь (3) з використанням ієрархічної розрахункової схеми [1, 2]. Тут рівняння (3) приймаються в якості вихідної системи на нульовому ієрархічному рівні.

Далі відповідно до ієрархічного підходу [1, 2] класифікуємо змінні, які входять до системи рівнянь (3), на повільні змінні x та швидкі фази ψ , формуємо ряд великих параметрів задачі

$$\xi_1 \gg \xi_2 \gg \dots \gg \xi_m \gg \xi_k \gg 1, \tag{4}$$

де

$$\xi_m \sim \left| \frac{d\psi_m}{dt} \right| \left/ \left| \frac{dx_q}{dt} \right| \right., \tag{5}$$

ψ_m – m -а компонента вектора швидких фаз ψ ; x_q – q -а компонента вектора повільних змінних x , швидкість зміни якої не перевищує швидкість зміни інших повільних змінних.

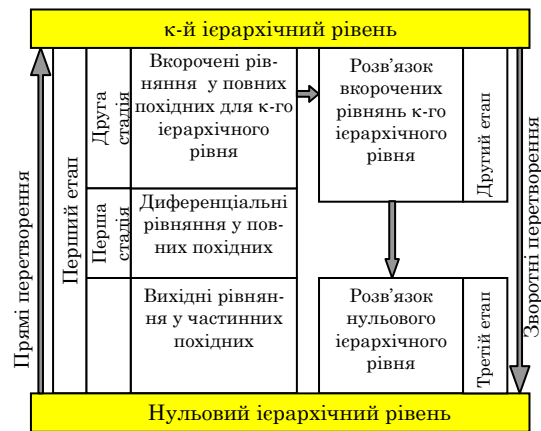


Рис. 1 - Схема обчислювальної процедури методу усереднених характеристик

Потрібно зазначити, що функції Z, R в (3) є періодичними функціями від компонент вектора швидких фаз ψ . Можливі розрахункові схеми, в яких великий параметр ξ_m (5) характеризує швидкість зміни не однієї швидкої фази, а групи швидких фаз.

Як випливає з (4)–(5), найбільшою швидкістю зміни характеризується швидка фаза ψ_1 . Швидкості зміни інших фаз у порівнянні з ψ_1 є малими, і тому інші фази при переході від нульового ієрархічного рівня до першого можна віднести до повільних змінних. У результаті систему рівнянь (3) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} &= \frac{1}{\xi_1} \mathbf{X}_1(\mathbf{x}_1, \psi_1), \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= \Omega_1(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{\xi_1} Y_1(\mathbf{x}_1, \psi_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Для знаходження асимптотичних розв'язків системи (6) використовуємо заміну Крилова-Боголюбова [1,2, 13–15] і переходимо до усереднених величин $\bar{\mathbf{x}}_1$ і $\bar{\psi}_1$ (величинам наступного рівня ієрархії):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \bar{\mathbf{x}}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_1^n} \mathbf{u}_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1), \\ \psi_1 &= \bar{\psi}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_1^n} v_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Функції $\mathbf{u}_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1)$ й $v_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1)$ вибираємо так, щоб усереднені величини задовольняли наступній системі рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{x}}_1}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_1^n} \mathbf{A}_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1), \\ \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} &= \Omega_1(\bar{\mathbf{x}}_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_1^n} B_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1). \end{aligned} \quad (8)$$

Основний зміст заміни (7) полягає в тому, що повільний рух, обумовлений вектором $\bar{\mathbf{x}}_1$, повністю відділено від швидкої змінної $\bar{\psi}_1$. А саме, права час-

тина системи (8) не залежить від $\bar{\psi}_1$ і тому інтегрується незалежно від рівняння (9). Визначивши з (8) $\bar{\mathbf{x}}_1$, підставивши отримані розв'язки $\bar{\mathbf{x}}_1$ в (9), ми можемо знайти з рівняння (9) шукану $\bar{\psi}_1(t)$, наприклад, обчисливши квадратуру. Рівняння (8)-(9) визначають поведінку досліджуваної системи на *першому ієрархічному рівні*.

Функції $\mathbf{A}_1^{(n)}, B_1^{(n)}, \mathbf{u}_1^{(n)}, v_1^{(n)}$, які входять у систему рівнянь (7)-(9) мають вигляд [1,2, 13-15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{g}_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1) d\bar{\psi}_1, \\ B_1^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1) d\bar{\psi}_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_1^{(n)} = \frac{1}{\Omega_1} \int_0^{\bar{\psi}_1} (\mathbf{g}_1^{(n)} - \mathbf{A}_1^{(n)}) d\bar{\psi}_1 + \phi_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1), \quad (11)$$

$$v_1^{(n)} = \frac{1}{\Omega_1} \int_0^{\bar{\psi}_1} (h_1^{(n)} - B_1^{(n)}) d\bar{\psi}_1 + \varpi_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1). \quad (12)$$

Як впливає з (10)-(12), вирази для $\mathbf{A}_1^{(n)}, B_1^{(n)}, \mathbf{u}_1^{(n)}, v_1^{(n)}$ визначаються через $\mathbf{g}_1^{(n)}$ і $h_1^{(n)}$, які, у свою чергу, пов'язані з функціями $\mathbf{X}_1(\mathbf{x}_1, \psi_1)$, $\Omega_1(\mathbf{x}_1)$ і $Y_1(\mathbf{x}_1, \psi_1)$ вихідної системи рівнянь (6). Для перших трьох наближень функції $\mathbf{g}_1^{(n)}$ й $h_1^{(n)}$ визначаються виразами:

$$\mathbf{g}_1^{(1)} = \frac{1}{\xi_1} \mathbf{X}_1(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1), \quad h_1^{(1)} = \frac{1}{\xi_1} \left(\sum_j \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1^{(j)}} u_1^{(1,j)} + Y(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1) \right), \quad (13)$$

$$\mathbf{g}_1^{(2)} = \frac{1}{\xi_1^2} \left[\sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial x_1^{(j)}} u_1^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(1)}}{\partial x_1^{(j)}} A_1^{(1,j)} \right) + \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial \bar{\psi}_1} v_1^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(1)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_1^{(1)} \right], \quad (14)$$

$$h_1^{(2)} = \frac{1}{\xi_1^2} \left[\sum_j \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x_1^{(j)}} u_1^{(1,j)} - \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial x_1^{(j)}} A_1^{(1,j)} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1^{(j)}} u_1^{(2,j)} \right) + \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{\psi}_1} v_1^{(1)} - \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_1^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1^{(j)} \partial x_1^{(k)}} u_1^{(1,j)} u_1^{(1,k)} \right], \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1^{(3)} &= \frac{1}{\xi_1^3} \left[\sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial x_1^{(j)}} u_1^{(2,j)} + \frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial x_1^{(j)} \partial \bar{\psi}_1} u_1^{(1,j)} v_1^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(2)}}{\partial x_1^{(j)}} A_1^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(1)}}{\partial x_1^{(j)}} A_1^{(2,j)} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial x_1^{(j)} \partial x_1^{(k)}} u_1^{(1,j)} u_1^{(1,k)} + \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial \bar{\psi}_1} v_1^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial \bar{\psi}_1 \partial \bar{\psi}_1} (v_1^{(1)})^2 - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(2)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_1^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(1)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_2^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} h_1^{(3)} &= \frac{1}{\xi_1^3} \left[\sum_j \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x_1^{(j)}} u_1^{(2,j)} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \bar{\psi}_1 \partial x_1^{(j)}} v_1^{(1)} u_1^{(1,j)} - \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial x_1^{(j)}} A_1^{(2,j)} - \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x_1^{(j)}} A_1^{(1,j)} - \right. \right. \\ &- \left. \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1^{(j)}} u_1^{(3,j)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x_1^{(j)} \partial x_1^{(k)}} u_1^{(1,j)} u_1^{(1,k)} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1^{(j)} \partial x_1^{(k)}} u_1^{(1,j)} u_1^{(2,k)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \bar{\psi}_1 \partial \bar{\psi}_1} (v_1^{(1)})^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{j,k,s} \left(\frac{\partial^3 Y_1}{\partial x_1^{(j)} \partial x_1^{(k)} \partial x_1^{(s)}} u_1^{(1,j)} u_1^{(1,k)} u_1^{(1,s)} \right) + \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{\psi}_1} v_1^{(2)} - \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_1^{(2)} - \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_1^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Також потрібно зазначити, що функції $\phi_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}})$ й $\varpi_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}})$ в (11)-(12) мають зміст сталих інтегрування. Існують різні способи задання цих функцій. Наприклад, ці функції можна вибирати так, щоб сталі складові функцій $\mathbf{u}_1^{(n)}$ і $v_1^{(n)}$ дорівнювали нулю. На-

гадаємо, у співвідношеннях (13)–(17) $\bar{\mathbf{x}}_1$, $\mathbf{u}_1^{(n)}$ і $\mathbf{A}_1^{(n)}$ – вектори з компонентами $\bar{x}_1^{(j)}$, $u_1^{(n,j)}$ і $A_1^{(n,j)}$ відповідно, $\bar{\psi}_1$, $v_1^{(n)}$ і $B_1^{(n)}$ – скаляри. Аналогічно \mathbf{X}_1 – вектор-функція, а Y_1 й Ω_1 – скалярні функції.

Аналізуючи отриману систему (8), бачимо, що хо-

ча вона й не залежить від швидкої фази $\bar{\psi}_1$, але, все ж, залишається залежною від інших швидких фаз $\psi_2, \dots, \psi_m, \dots, \psi_k$. Тому її інтегрування все ще залишається складним завданням. З іншого боку, для знаходження розв'язків рівняння (8) ми знову можемо застосувати викладений вище алгоритм (7), (10)-(17). В якості швидкої фази використовуємо ψ_2 (нагадаємо, на першому ієрархічному рівні фаза ψ_2 входить у вектор повільних змінних $\bar{\mathbf{x}}_1$). Фази, що відповідають великим параметрам $\xi_3, \xi_4, \dots, \xi_k$, на цьому етапі розв'язування задачі віднесемо до вектора повільних змінних \mathbf{x}_2 , тобто $\bar{\mathbf{x}}_1 = \{\mathbf{x}_2, \psi_2\}$. У результаті система (8) може бути записана у формі аналогічній до (6):

$$\frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \frac{1}{\xi_2} \mathbf{X}_2(\mathbf{x}_2, \psi_2),$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \Omega_2(\mathbf{x}_2) + \frac{1}{\xi_2} Y_2(\mathbf{x}_2, \psi_2).$$

Далі до цієї системи застосовуємо заміну Крилова-Боголюбова як і в (7), (10)-(17) та отримуємо усереднені рівняння другого ієрархічного рівня

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}_2}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_2^n} \mathbf{A}_2^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_2), \quad (18)$$

$$\frac{d\bar{\psi}_2}{dt} = \Omega_2(\bar{\mathbf{x}}_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_2^n} B_2^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_2). \quad (19)$$

Бачимо, що повільний рух (18), що описується вектором $\bar{\mathbf{x}}_2$, як і у випадку рівняння (8), уже повністю відділений від швидкої фази $\bar{\psi}_2$, тобто стає більш простим. Рівняння (18)-(19) визначають поведінку досліджуваної системи на другому ієрархічному рівні.

Аналогічну процедуру інтегрування ми можемо застосувати багаторазово, доки у рівняннях виду (8), (18) не будуть відокремлені всі швидкі фази, що відповідають ряду великих параметрів (4). У підсумку отримаємо рівняння для повільних змінних на найвищому к-му ієрархічному рівні, які мають таку ж структуру, як і рівняння (8), (18). Рівняння на найвищому к-му ієрархічному рівні вже не містять швидких фаз і тому є більш простими, ніж рівняння (2). Отримання вкорочених рівнянь на найвищому к-му ієрархічному рівні, які не залежать від швидких фаз, являє собою основний зміст першого етапу (рис. 1).

Далі переходимо до другого етапу обчислювальної процедури, що полягає у знаходженні розв'язків усередненого рівняння на к-му ієрархічному рівні (рис. 1). Для цього можна застосувати стандартні методи, наприклад, метод повільно змінних амплітуд [1-7]. Можливі й інші варіанти знаходження розв'язків, наприклад, з використанням методу характеристик [1, 2, 8, 9]. У будь-якому випадку, знаходити розв'язки усередненого рівняння на найвищому к-му ієрархічному рівні набагато легше, ніж розв'язки вихідного рівняння, тому що воно не міс-

тить швидкоосцилюючих фаз.

Однак нам потрібні не розв'язки усередненого рівняння на к-у ієрархічному рівні, а розв'язки вихідного рівняння (2). Тому на наступному, третьому етапі проводимо зворотні перетворення. Для цього використовуємо заміну змінних Крилова-Боголюбова, яка пов'яже змінні довільного m-го ієрархічного рівня зі змінними (m - 1)-го рівня,

$$\bar{\mathbf{x}}_{m-1} = \bar{\mathbf{x}}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{u}_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m),$$

$$\bar{\psi}_{m-1} = \bar{\psi}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} v_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m), \quad (20)$$

де $\bar{\mathbf{x}}_{m-1} = \mathbf{x}_m$, $\bar{\psi}_{m-1} = \psi_m$, це впливає зі співвідношень (7). Нагадаємо, функції $\mathbf{u}_m^{(n)}, v_m^{(n)}$, які входять до системи рівнянь (20), знаходяться за вже відомою процедурою (11)-(17).

Таким чином, співвідношення (7), (20) відіграють подвійну роль в обговореній вище обчислювальній схемі. Використовуючи їх, ми виконуємо як прямі, так і зворотні перетворення (рис. 1). Завдяки зворотним перетворенням ми виконуємо перехід від найвищого к-го ієрархічного рівня до вихідного (нульового) й знаходимо розв'язки вихідного рівняння (3).

Сутність виконання зворотних перетворень від змінних $\{\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m\}$ до змінних $\{\bar{\mathbf{x}}_{m-1}, \bar{\psi}_{m-1}\}$ полягає в тому, щоб знайти $\{\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m\}$ як функції $\{\bar{\mathbf{x}}_{m-1}, \bar{\psi}_{m-1}\}$ за наявним зв'язком (20) [1, 2, 10-12]. Співвідношення (20), є нелінійними рівняннями, оскільки залежать, у загальному випадку, від нелінійних, хоча й відомих, функцій $\mathbf{u}_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m)$ і $v_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m)$. Таким чином, проведення зворотних перетворень виявляється досить непростим завданням.

Для того щоб у загальному вигляді знайти зв'язок між змінними двох сусідніх ієрархічних рівнів, скористаємося наступним спостереженням, а саме, що різниця між довільними змінними двох сусідніх ієрархічних рівнів (наприклад, (m-1)-м та m-м, див. (20)) пропорційна $1/\xi_m \ll 1$. Це спостереження дозволяє розкласти функції $\mathbf{u}_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m)$ та $v_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m)$ у ряд Тейлора в околі змінних (m-1)-го ієрархічного рівня. Виходячи зі співвідношень (20), заміняємо в цьому розкладанні всі різниці типу $(\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1})$, $(\bar{\psi}_m - \bar{\psi}_{m-1})$ через функції $\mathbf{u}_m^{(n)}, v_m^{(n)}$ та отримуємо шуканий асимптотичний зв'язок між змінними сусідніх ієрархічних рівнів:

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{u}_m^{(n)} \right) \Big|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} +$$

$$+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_m^{(n)}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{u}_m^{(n)} \right) \right) \Big|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \dots, \quad (21)$$

$$+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_m^{(n)}}{\partial \bar{\psi}_m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} v_m^{(n)} \right) \right) \Big|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \dots$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_m = & \bar{\psi}_{m-1} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{v}_m^{(n)} \right) \Bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \\ & + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_m^{(n)}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{u}_m^{(n)} \right) \right) \Bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \dots \quad (22) \\ & + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_m^{(n)}}{\partial \bar{\psi}_m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{v}_m^{(n)} \right) \right) \Bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \dots \end{aligned}$$

Ці перетворення дозволяють перейти від розв'язків, отриманих на найвищому k-му ієрархічному рівні до розв'язків вихідного нульового ієрархічного рівня (рис. 1).

Таким чином, в основі методу усереднених характеристик лежить ідея заміни складної мультирезонансної і мультигармонічної вихідної задачі (2) на більш просту, у якій відсутні осциляторні змінні. Вирішуючи таке завдання, а потім, здійснюючи зворотний перехід, отримуємо розв'язки вихідної складної задачі.

3. МОДЕРНІЗАЦІЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ІЗ МУЛЬТИГАРМОНІЧНИМИ РЕЗОНАНСНИМИ ВЗАЄМОДІЯМИ

Метод усереднених характеристик застосовується для вирішення задачі руху, що є першою частиною самоузгодженої задачі динаміки електромагнітних полів. Як впливає зі сказаного вище, розв'язки, що знаходяться за допомогою методу усереднених характеристик, подані у вигляді асимптотичних рядів за малим параметром $1/\xi$ й залежать від швидких фаз. Ця обставина дозволяє знайти густину електричного струму та концентрації частинок, що рухаються в досліджуваних пристроях, у вигляді рядів Тейлора-Фур'є.

Для рішення другої частини самоузгодженої задачі, польової задачі, використовуємо рівняння Максвелла, до яких входять густина електричного струму та концентрація частинок. Та обставина, що ці величини у результаті застосування методу усереднених характеристик мають вигляд рядів Тейлора-Фур'є, дозволяє перетворити рівняння Максвелла до стандартного вигляду для методу повільно змінних амплітуд [1-7] і, отже, достатньо легко отримати вкорочені рівняння для амплітуд електромагнітних полів.

Також потрібно врахувати, що в рівняннях Максвелла ми повинні використовувати густину електричного струму й концентрацію, як функції неусереднених швидких фаз, оскільки у рівняннях Максвелла поля подані як функції від неусереднених Ейлерових швидких фаз. У цьому зв'язку, виникає завдання у модернізації алгоритму асимптотичного інтегрування, який полягає в об'єднанні процедур прямого (7)-(17) і зворотного перетворення (21)-(22) в одну процедуру, що дозволила б отримати густину електричного струму і концентрацію електронних пучків як функції неусереднених швидких фаз. При цьому усереднені повільні змінні, наприклад, постійна

складова швидкості, постійна складова концентрації і т.д., можуть і повинні використовуватися у вкорочених рівняннях для амплітуд полів, які ми отримуємо з рівнянь Максвелла. Тому рівняння для амплітуд полів повинні бути обов'язково доповнені рівняннями для повільних змінних.

Для того щоб отримати усереднені рівняння як функції неусереднених швидких фаз, у співвідношення (7)-(17) підставимо зворотне перетворення для швидкої фази (22). У результаті досить громіздких перетворень прийдемо до шуканого алгоритму асимптотичного інтегрування. Викладемо цей алгоритм спочатку для випадку однієї швидкої фази, а потім узагальнимо його для випадку багатьох швидких фаз.

3.1 Випадок однієї швидкої фази

Проведемо модернізацію алгоритму асимптотичного інтегрування (7)-(17) з урахуванням зворотного перетворення (22) для швидких фаз. В якості вихідної системи рівнянь використовуємо систему подібну до (6):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \Omega(\mathbf{x}) + \frac{1}{\xi} Y(\mathbf{x}, \psi) \end{aligned} \quad (23)$$

Для переходу до усереднених повільних змінних використовуємо заміну Крилова-Боголюбова у модернізованій порівняно з (7) формі

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \psi). \quad (24)$$

Як бачимо, у перетворенні (24) на відміну від (7) швидка фаза залишається неусередненою. Як і раніше функцію $\mathbf{u}^{(n)}$ підбираємо таким чином, щоб праві частини усереднених рівнянь для повільних змінних не залежали від швидких фаз

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{A}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (25)$$

Функції $\mathbf{u}^{(n)}$ й $\mathbf{A}^{(n)}$, які входять в (24)-(25), знаходимо з наступних співвідношень

$$\mathbf{A}^{(n)} = \left\langle \mathbf{g}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \psi) \right\rangle, \quad (26)$$

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{m=-N, m \neq 0}^{m=N} \frac{\mathbf{g}_m^{(n)}}{im\Omega(\bar{\mathbf{x}})} \exp(im\psi). \quad (27)$$

У рівняннях (26)-(27) використані позначення

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_m^{(n)} &= \left\langle \mathbf{g}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \psi) \right\rangle_{m\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^{(n)} e^{-im\psi} d\psi, \\ \left\langle \mathbf{g}^{(n)} \right\rangle &= \left\langle \mathbf{g}^{(n)} \right\rangle_{0,\psi} \end{aligned} \quad (28)$$

Вирази для $\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}$ визначаються через $\mathbf{g}^{(n)}$, які пов'язані з функціями $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \psi), \Omega(\mathbf{x})$ вихідної системи рівнянь (23) наступним чином:

$$\mathbf{g}^{(1)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\psi}), \quad (29)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = \frac{1}{\xi^2} \sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\psi}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} + Y \right) \right), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(3)} = \frac{1}{\xi^3} & \left[\sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\psi}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \boldsymbol{\psi}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} + Y \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\psi}} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

Нагадаємо, співвідношеннях (24)-(31) $\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{u}^{(n)}$ та $\mathbf{A}^{(n)}$ – вектори з компонентами $\bar{x}^{(j)}$, $u^{(n,j)}$ і $A^{(n,j)}$ відповідно, \mathbf{X} – вектор-функція, а Ω – скалярна функція.

Таким чином, алгоритм (24)-(31) вирішує поставлене вище завдання. Легко переконатися, що ці співвідношення є суттєво простішими порівняно з немодернізованими (7)-(17), (21), (22).

3.2 Випадок кількох швидких фаз

Узагальнимо отриманий алгоритм (24)-(31) на випадок декількох швидких фаз. Приймемо, що $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\kappa\}$ – вектор швидких фаз, $\Omega(\mathbf{x})$ – вектор-функція повільних змінних, $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi})$ – вектор-функція повільних і швидких змінних. Тоді вихідна система отримує вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}), \\ \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} &= \Omega(\mathbf{x}) + \frac{1}{\xi} \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) \end{aligned} \quad (32)$$

Для переходу до усереднених повільних змінних використовуємо заміну Крилова-Боголюбова, що залежить від вектора швидких фаз

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\psi}), \quad (33)$$

Функції $\mathbf{u}^{(n)}$ підбираємо таким чином, щоб праві частини усереднених рівнянь для повільних змінних не залежали від швидких

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{A}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (34)$$

Алгоритм знаходження функцій $\mathbf{u}^{(n)}$ і $\mathbf{A}^{(n)}$, що входять до формул (33)–(34), змінюється. Осциляторні компоненти (33) знаходяться з співвідношення

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(n)} &= \sum_{m_1=-N}^{m_1=+N} \dots \sum_{m_\kappa=-N}^{m_\kappa=+N} \frac{\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_\kappa}^{(n)}}{i(m_1 \Omega_1 + \dots + m_\kappa \Omega_\kappa)} \times \\ &\times \exp(i(m_1 \psi_1 + \dots + m_\kappa \psi_\kappa)) \end{aligned} \quad (35)$$

за умови, щоб жоден із знаменників (35) не дорівнював нулю.

Випадки, коли знаменники в (35) дорівнюють нулю

$$m_1 \Omega_1 + \dots + m_\kappa \Omega_\kappa = 0, \quad (36)$$

називають комбінаційними резонансами [1–3, 11–15]. Це означає, що осциляторні доданки в (35) визначаються тільки нерезонансними компонентами $\mathbf{g}^{(n)}$.

Функція $\mathbf{A}^{(n)}$, на відміну від аналогічної формули (26), визначається як середнім значенням $\langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle$, так і компонентами $\mathbf{g}^{(n)}$, що пов'язані з комбінаційними резонансами

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{g}_{m_1, \dots, m_\kappa}^{(n)} \Big|_{m_1 \Omega_1 + \dots + m_\kappa \Omega_\kappa = 0}. \quad (37)$$

У рівняннях (35) і (37) ми використовуємо позначення

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{m_1, \dots, m_\kappa}^{(n)} &= \langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle_{m_1 \psi_1, \dots, m_\kappa \psi_\kappa} = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^\kappa \cdot \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^{(n)} e^{-i(m_1 \psi_1 + \dots + m_\kappa \psi_\kappa)} d\psi_1 \dots d\psi_\kappa \end{aligned} \quad (38)$$

Функції $\mathbf{g}^{(n)}$, через які визначаються $\mathbf{u}^{(n)}$ і $\mathbf{A}^{(n)}$ в (35) і (37), мають такий вигляд:

$$\mathbf{g}^{(1)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\psi}), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(2)} &= \frac{1}{\xi^2} \sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \right. \\ &\left. - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \left(\frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} + Y_s \right) \right) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(3)} &= \frac{1}{\xi^3} \left[\sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(2,j)} - \right. \right. \\ &\left. - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \left(\frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} + \frac{\partial Y_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right) - \right. \\ &\left. - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \psi_s} \left(\frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} + Y_s \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} - \right. \\ &\left. - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Таким чином, наявність декількох швидких фаз якісно міняє процедуру асимптотичного інтегрування – виникає необхідність урахування комбінаційних резонансів. З погляду математичної процедури, урахування комбінаційних резонансів полягає у розділенні $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_\kappa}^{(n)}$ на резонансні компоненти, для яких виконується умова (36), і нерезонансні, для яких ця

умова не виконується. Через те що частоти Ω_s , які залежать від повільних змінних \mathbf{x} , із часом змінюються, то в процесі інтегрування ми постійно повинні перевіряти умову (36). Така перевірка з погляду комп'ютерного моделювання зводиться до перевірки нерівності

$$m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k \leq 1/\xi. \quad (42)$$

Кількість гармонік N , що враховується при комп'ютерному моделюванні, обмежена $m_s \leq N$. Тому комп'ютерна перевірка умови (42) є нескладним завданням.

Також потрібно зазначити, що, виходячи з фізичних міркувань, практично всі резонансні умови типу (36), (42) є відомими. Тому доцільно дану перевірку об'єднати із процедурою знаходження функцій $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}$ (38). Функції $\mathbf{g}^{(n)}$, які використовуються в задачах сильнотривової електроніки, як правило, формуються величинами, що мають вигляд рядів Фур'є з повільно змінними амплітудами. Тож чисельне знаходження амплітуд $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}$ при відповідних комбінаційних фазах фактично зводиться до аналізу резонансних умов і формуванню $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}$ як функцій повільних змінних.

Таким чином, алгоритми, що описані в (33)-(41) дозволяють розв'язувати мультигармонічні нелінійні задачі з урахуванням специфіки мультигармонічних резонансних взаємодій у пристроях сильнотривової електроніки. Порівнюючи отриманий алгоритм із немодернізованим (7)-(22), можемо перекопатися, що модернізований алгоритм асимптотичного інтегрування є більш простим.

4. ВИСНОВКИ

Таким чином, у роботі проведена модернізація методу усереднених характеристик, а саме, етапу

побудови схеми асимптотичного інтегрування систем нелінійних диференціальних рівнянь, з урахуванням специфіки мультигармонічних резонансних взаємодій у приладах сильнотривової електроніки. Отримано схеми асимптотичного інтегрування, які поєднують процедури прямого і зворотного переходів. У роботі подані кубічні нелінійні рівняння, що описують процедуру такого асимптотичного інтегрування, як для випадку однієї швидкої фази (24)-(31), так і для випадку багатьох швидких фаз (33)-(41). Порівнюючи модернізовані алгоритми асимптотичного інтегрування для однієї (24)-(31) та багатьох швидких фаз (33)-(41) з немодернізованим алгоритмом (7)-(22), можемо перекопатися, що модернізований алгоритм асимптотичного інтегрування є більш простим. Ця обставина дозволяє істотно збільшити ефективність методу усереднених характеристик. Тому варто очікувати, що використання модернізованого методу усереднених характеристик буде ефективним не тільки в задачах сильнотривової електроніки, але також і в задачах традиційної нелінійної електродинаміки плазми та у ряді інших областей нелінійної фізики. Відзначимо, що для використання модернізованого алгоритму асимптотичного інтегрування, рівняння руху необхідно звести до досить загальної форми (23), що свідчить про високий рівень універсальності модернізованого методу. Також за його допомогою можна описати множинні параметричні резонанси і різного типу нестійкості у рамках єдиного підходу.

Вищесказане дає підставу очікувати, що на базі модернізованого методу усереднених характеристик удасться створити нові ефективні розрахункові методи, призначені для моделювання фізичних процесів у пристроях сильнотривової електроніки. У тому числі з'являється можливість створення комплексу комп'ютерних програм для чисельно-аналітичних розрахунків багаторезонансних нелінійних задач.

Модернизированный метод усредненных характеристик для решения задач мультигармонических резонансных взаимодействий в устройствах сильноточной электроники

В.В. Кулиш¹, А.В. Лысенко², Г.А. Алексеенко², Г.В. Быченко², А.А. Колоскова²

¹ *Национальный авиационный университет, пр. Космонавта Комарова, 1, 03058 Киев, Украина*

² *Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина*

Проведена модернизация метода усредненных характеристик в части построения схемы асимптотического интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений с учетом специфики мультигармонических резонансных взаимодействий в устройствах сильноточной электроники. Получены схемы асимптотического интегрирования, объединяющие процедуры прямого и обратного переходов. Рассмотрен как случай одной быстрой фазы, так и случай многих быстрых фаз.

Ключевые слова: Метод усредненных характеристик, Мультигармонические параметрические резонансы, Релятивистские электронные пучки, Нелинейные уравнения, Уравнения в частных производных.

Modernized Method of Averaged Characteristics for Problem Solving of Multiharmonic Resonant Interactions in Devices of High-Current Electronics

V.V. Kulish¹, A.V. Lysenko², G.A. Oleksiienko², G.V. Bychenko², O.A. Koloskova²

¹ National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova Ave., 03058 Kiev, Ukraine

² Sumy State University, 2, Rimsky Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine

We modernize the method of averaged characteristics in the part of constructing scheme of asymptotic integration of nonlinear differential equation systems, taking into account the features of multiharmonic resonant interactions in devices high-current electronics. The schemes of asymptotic integration, which combines procedures of the straight and inverse transformation, have been constructed. We consider both the case of a fast phase, and the case of many fast phases.

Keywords: Method of averaged characteristics, Multiharmonic parametric resonances, Relativistic electron beams, Nonlinear equations, Partial differential equations.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. V.V. Kulish, *Hierarchical Electrodynamics and Free Electron Lasers: Concepts, Calculations, and Practical Applications* (Boca Raton, London, New York: CRC Press: 2011).
2. V.V. Kulish, *Hierarchical methods: Hierarchy and hierarchic asymptotic methods in electrodynamics*, Vol. 1 (Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers: 2002).
3. Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов, *Лекции по сверхвысоко-частотной электронике для физиков*, Т. 1 (Москва: Физматлит: 2003) (D.I. Trubetskov, A.Ye. Khramov, *Lektsii po sverkhvysokochastotnoy elektronike dlya fizikov*, T. 1 (Moskva: Fizmatlit: 2003)).
4. М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков, *Плазменная релятивистская СВЧ-электроника* (Москва: Изд-во МГТУ им. Баумана: 2002) (M.V. Kuzelev, A.A. Rukhadze, P.S. Strelkov, *Plazmennaya relyativistskaya SVCH-elektronika* (Moskva: Izd-vo MGTU im. Baumana: 2002)).
5. M.V. Kuzelev, A.A. Rukhadze, *Methods of Wave Theory in Dispersive Media* (Singapore, London: World Scientific: 2009).
6. P.M. Bellan, *Fundamentals of Plasma Physics* (Cambridge: Cambridge University Press: 2006).
7. М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн* (Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: 2000) (M.I. Rabinovich, D.I. Trubetskov, *Vvedeniye v teoriyu kolebaniy i voln* (Izhevsk: NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika»: 2000)).
8. О.В. Капцов, *Методы интегрирования уравнений с частными производными* (Москва: ФИЗМАТЛИТ: 2009) (O.V. Kaptsov, *Metody integrirvaniya uravneniy s chastnymi proizvodnymi* (Moskva: FIZMATLIT: 2009)).
9. В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики* (Москва: Наука: 1976) (V.S. Vladimirov, *Uraveniyya matematicheskoy fiziki* (Moskva: Nauka: 1976)).
10. V.V. Kulish, A.V. Lysenko, A.Ju. Brusnik, *J. Infrared Milli. Terahz. Waves* **33**, 149 (2012).
11. V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko, *J. Infrared Milli. Waves* **14**, 451 (1993).
12. V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko, *J. Infrared Milli. Waves* **15**, 77 (1994).
13. Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику* (Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: 2004) (N.M. Krylov, N.N. Bogolyubov, *Vvedeniye v nelineynuyu mekhaniku* (Moskva-Izhevsk: NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika»: 2004)).
14. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (Москва: Наука: 1974) (N.N. Bogolyubov, Yu.A. Mitropol'skiy, *Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* (Moskva: Nauka: 1974)).
15. Н.Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики* (Москва: Наука: 1969) (N.N. Moiseyev, *Asimptoticheskiye metody nelineynoy mekhaniki* (Moskva: Nauka: 1969)).