

## Вплив кореляції між модами поляризації на статистичні властивості гаусівського низькоінтенсивного випромінювання

О.С. Мазманішвілі, І.О. Князь

Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007 Суми, Україна

(Одержано 30.04.2013, опубліковано online 31.01.2014)

У роботі аналітично описано формування статистики фотовідліків неполяризованого оптичного гаусівського випромінювання для випадку, коли між модами поляризації існує статистичний зв'язок. Отримано аналітичний вираз для твірної функції розподілу амплітуд, що містить інформацію про статистику фотовідліків. Розраховано розподіли набору амплітуд ймовірностей фотовідліків для випромінювання із корелюючими та некорелюючими модами. Показано, що збільшення кореляційного зв'язку між модами поляризації при незмінному першому моменті приводить до розширення розподілу амплітуд ймовірності фотовідліків.

**Ключові слова:** Статистика фотовідліків, Гаусівське випромінювання, Корелюючі моди, Матриця Стокса.

PACS numbers: 42.50.Ar, 02.50.Cw, 02.50.Ey

### 1. ВСТУП

Оптичні системи передачі інформації – один із найбільш перспективних напрямків в області техніки зв'язку, що увібрав у себе кращі досягнення волоконної оптики та мікроелектроніки. Серед сучасних проблем у цій області окремо виділяється задача аналізу якості оптоволоконних систем та встановлення допусків на параметри при їх прокладанні. Розв'язання даної задачі може бути реалізоване на основі статистичного аналізу фотовідліків із врахуванням векторних характеристик (поляризації) оптичного випромінювання, зокрема, кореляції між поляризаційними компонентами випромінювання, яка пов'язана із щільністю нерегулярностей у волокні.

Відомо, що в ідеальному циліндричному одномодовому світловоді стала розповсюдження основної моди не залежить від напрямку поляризації випромінювання, і, відповідно, таке волокно зберігає стан поляризації. Для опису статистики фотовідліків на виході такого світловода, як правило, застосовують напівкласичну модель фотоэффекту, яка не допускає субпуассонівську статистику фотовідліків [1]. За відсутності флуктуацій інтенсивності поля розподіл фотовідліків описується пуассонівською статистикою [2], а за умови врахування "фотонного шуму" – формулою Мандела окремо для кожної моди [3]. Однак на практиці збереження стану поляризації можливе лише на дуже малих довжинах світловолокна. Наявність нерегулярностей в одномодовому волокні (теплові, акустичні та механічні збурення уздовж волокна, вигонів, дефектів тощо) є причиною появи двох мод з ортогонально-поляризованими компонентами електричного поля [4]. При цьому навіть досить малі збурення сильно "зв'язують" моди, сприяючи "перекачуванню" енергії із однієї компоненти поляризації до іншої. У результаті, при довільній поляризації на вході, у процесі розповсюдження світла відбувається непередбачена довільна трансформація стану поляризації. Таким чином, виникає задача знаходження статистики фотовідліків у випадку скорельованих поляризаційних компонент основних мод випромінювання із кінцевим часом кореляції.

Відмітимо, що в останній час зацікавленість проблемою флуктуацій поляризації в одномодових світловодах значно підсилилась (див., наприклад, роботи по дослідженню поляризаційної модової дисперсії [5, 6]). Теоретичний апарат, використаний у більшості робіт, присвячених даній тематиці, базується на відомих класичних результатах, наведених у монографіях [7, 8], в основі яких лежить формула Мандела. У роботі [8], зокрема, показано, що інтенсивність частково поляризованої хвилі є сумою інтенсивностей двох некорельованих польових складових після проходження через поляризатор, який діагоналізує матрицю когерентності. У результаті розподіл інтегральної інтенсивності може бути поданий у вигляді дискретного згортання двох розподілів числа фотовідліків, по одній для кожного розподілу. У даній роботі ми узагальнюємо результати робіт [7, 8] і отримуємо розподіл фотовідліків для корелюючих поляризаційних мод із лоренцевим спектральним контуром лінії певної ширини. Ми припускаємо, що статистичний зв'язок між поляризаційними модами визначається щільністю збурень в оптичному носії, що дає змогу отримати якісні характеристики нерегулярностей уздовж волокна, і, відповідно, виробити вимоги до якості оптичних кабелів.

### 2. МОДЕЛЬ ТА ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ

#### 2.1 Випадок некорельованих поляризаційних мод

Розглянемо тривіальний випадок некорельованих поляризаційних мод. У рамках моделі гаусівського випромінювання із лоренцевським контуром лінії ширини  $\nu$  покладемо, що кожна компонента становить собою стаціонарний марківський процес [4, 9]. У такому разі кореляційна матриця інтенсивностей  $S = \langle \alpha(t) \otimes \alpha^*(t) \rangle$  дорівнює

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho^* \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \\ \rho \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де  $\alpha_n(t)$  – комплексна амплітуда компонентів ( $n = 1, 2$ ) поляризації випромінювання [10, 11],  $\sigma_n = \langle |\alpha_n(t)|^2 \rangle$  – інтенсивність поляризаційних компонент,  $\rho$  – коефіцієнт кореляції ( $0 \leq |\rho| \leq 1$ ) між компонентами поляризації,  $\langle \cdot \rangle$  – знак знаходження математичного очікування.

Відомо [10, 11], що твірна функція для однокомпонентного гаусівського випромінювання має вигляд

$$Q_{1(2)}(\lambda, \sigma_{1(2)}) = \langle \exp(-\lambda \Omega_{1(2)}) \rangle, \quad (2)$$

де  $\sigma_{1(2)}$  – інтенсивність випромінювання першої (другої) моди,  $\lambda$  – твірний параметр,  $\Omega_{1(2)}$  – енергія оптичного поля, яка міститься у компоненті поляризації з ортом  $\vec{e}_{1(2)}$ ,

$$\Omega_{1(2)} = \int_0^T dt |\vec{e}_{1(2)} \alpha_{1(2)}(t)|^2. \quad (3)$$

Твірна функція  $Q_{1(2)}(\lambda, \sigma_{1(2)})$  для гаусівського випромінювання із лоренцевським контуром лінії шириною  $\nu$  має вигляд [12]

$$Q_{1(2)}(\lambda, \sigma_{1(2)}) = \frac{4\nu r_{1(2)} \exp(\nu T)}{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (r_{1(2)} + (-1)^i \nu)^2 \exp((-1)^i r_{1(2)} T)}, \quad (4)$$

де  $r_{1(2)} = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda \nu \sigma_{1(2)}}$ ,  $T$  – тривалість інтервалу спостереження.

Розподіл амплітуд імовірностей  $\{P(m)\}$  реєстрації  $m$  фотовідліків для кожної компоненти поляризації є зваженим розподілом Пуассона і може бути отриманий за допомогою формули Манделя [3]:

$$P_{1(2)}(m) = \left\langle \frac{\Omega_{1(2)}^m}{m!} \exp(-\Omega_{1(2)}) \right\rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

За допомогою твірних функцій  $Q_1(\lambda, \sigma_1)$  та  $Q_2(\lambda, \sigma_2)$  формула (5) може бути представлена у вигляді

$$P_{1(2)}(m) = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} Q_{1(2)}(\lambda, \sigma_{1(2)}) \Big|_{\lambda=1}. \quad (6)$$

З метою уникнути знаходження похідних високих порядків можна скористатися інтегральним поданням Коші для аналітичних функцій. Це дає зручну формулу для чисельних розрахунків, що описує статистику фотовідліків поляризаційного компонента одномодового випромінювання

$$P_{1(2)}(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} Q_{1(2)}(1 + e^{i\varphi}, \sigma_{1(2)}) e^{im(\pi-\varphi)} d\varphi. \quad (7)$$

## 2.2 Довільний статистичний зв'язок між модами поляризації

Для опису двокомпонентного оптичного випромінювання скористаємося матричним аналогом інтегральної формули Коші. У такому випадку твірна функція  $Q_{12}(\lambda)$  відліків неполяризованого випромінювання може бути записана у вигляді

$$Q_{12}(\lambda) = \det \left( \oint \frac{ds}{2\pi i} (s - S)^{-1} Q(\lambda, s) \right). \quad (8)$$

У цьому виразі контур інтегрування в  $s$ -площині повинен охоплювати полюса резольвенти  $(s - S)^{-1}$ . Користуючись відомими методами [9], розглянемо скаляр (8) у поданні, в якому матриця Стокса (1) діагональна, тобто

$$S \rightarrow S_{diag} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \left( (\sigma_1 + \sigma_2) \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4|\rho|^2 \sigma_1 \sigma_2} \right).$$

За наявності статистичного зв'язку між модами поляризації,  $|\rho| \neq 0$ , власні числа  $s_1$  та  $s_2$  будуть означати формування статистики фотовідліків. Враховуючи (9), матриця (8) набуває вигляду

$$Q_{12}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \oint \frac{ds}{2\pi i} \frac{Q_1(\lambda, s)}{s - s_1} & 0 \\ 0 & \oint \frac{ds}{2\pi i} \frac{Q_2(\lambda, s)}{s - s_2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Остаточно, для шуканої твірної функції маємо

$$Q_{12}(\lambda) = Q_1(\lambda, s_1) Q_2(\lambda, s_2). \quad (11)$$

Вираз (11) описує статистику фотовідліків неполяризованого випромінювання у випадку наявності статистичного зв'язку між модами поляризації. З (11) випливає, що у випадку відсутності статистичної зв'язку, коли  $|\rho| = 0$  і  $s_1 = \sigma_1$ ,  $s_2 = \sigma_2$ , твірна функція  $Q_{12}(\lambda)$  представляє собою добуток парціальних твірних функцій

$$Q_{12}(\lambda) = Q_1(\lambda, \sigma_1) Q_2(\lambda, \sigma_2) = \prod_{i=1}^2 \frac{4\nu r_i \exp(\nu T)}{(r_i + \nu)^2 e^{r_i T} - (r_i - \nu)^2 e^{-r_i T}},$$

де  $r_i = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda \nu \sigma_i}$ . При цьому розподіл  $P_{12}(m)$  являє собою зортку парціальних розподілів  $P_1(m)$  та  $P_2(m)$  із середніми  $\langle m \rangle_1 = \sigma_1 T$  та  $\langle m \rangle_2 = \sigma_2 T$  відповідно.

В іншому граничному випадку повного статистичного зв'язку, коли  $|\rho| = 1$ , статистика фотовідліків ефективно відповідає одній поляризаційній моді із сумарною інтенсивністю  $s_1 = \sigma_1 + \sigma_2$ . При цьому  $s_2 = 0$ , що дає  $Q_2(\lambda, \sigma_2) = 1$  та  $P_2(m = 0) = 1$ . Це означає, що для іншої поляризаційної компоненти із ймовірністю, що дорівнює одиниці, має місце лише "відлік"  $m = 0$ .

## 3. РЕЗУЛЬТАТИ

У загальному випадку за наявності статистичного зв'язку між модами поляризації ( $0 \leq |\rho| \leq 1$ ) розподіл амплітуд імовірностей  $P_{12}(m)$  є зваженим розподілом Пуассона. При  $|\rho| \neq 0$  розподіл  $P_{12}(m)$  фотовідліків є зорткою парціальних розподілів  $P_1(m)$  та  $P_2(m)$

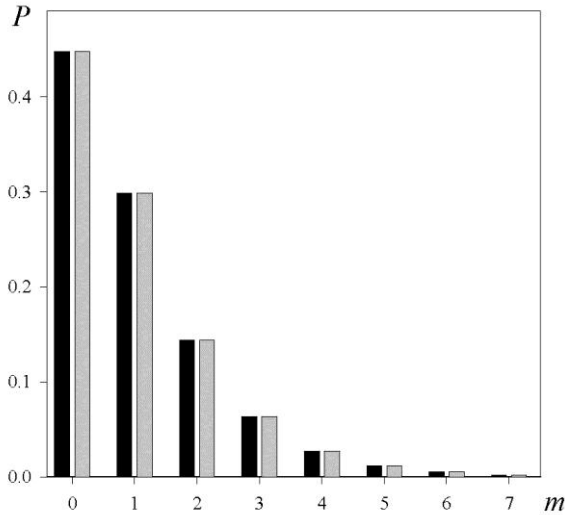


Рис. 1 – Статистика фотовідліків при  $|\rho| = 0$ ,  $\nu = 10^8$  Гц,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^8$  с $^{-1}$ ,  $T = 10^{-8}$  с. Розподіл амплітуд першої та другої поляризаційних мод позначено відповідно сірим та чорним кольором

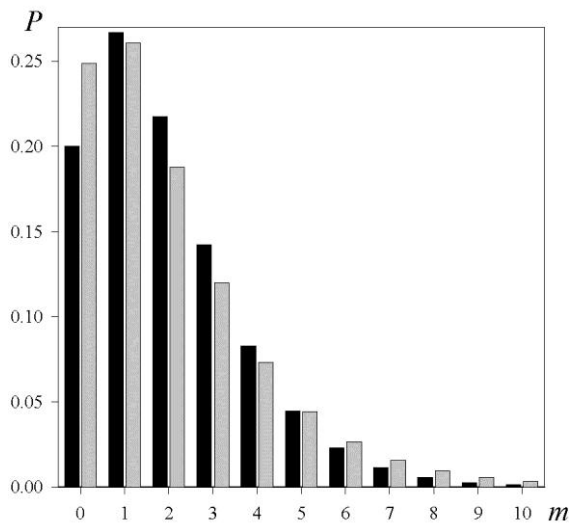


Рис. 2 – Статистика фотовідліків при  $|\rho| = 0$  (чорний колір) та  $|\rho| = 1$  (сірий колір). Інші параметри розрахунку ті ж самі, що на рисунку 1

$$P_{12}(m) = \sum_{n=0}^m P_1(n)P_2(m-n), \quad m = 0,1,2,\dots,$$

із середніми  $\langle m \rangle_1 = s_1 T$  й  $\langle m \rangle_2 = s_2 T$  відповідно.

Розглянемо випадок відсутності кореляцій між поляризаційними модами, тобто  $|\rho| = 0$ . На рисунку 1 представлено результат чисельного розрахунку набору амплітуд  $\{P(m)\}$ . З рисунку 1 бачимо, що за умови  $\sigma_1 = \sigma_2$  розподіли амплітуд є однаковими.

На рисунку 2 представлені розподіли набору амплітуд  $\{P(m)\}$  у випадку некорельованих ( $|\rho| = 0$ ) та корельованих ( $|\rho| = 1$ ) мод. Як бачимо, наявність кореляції приводить до розширення розподілу амплітуд, що можна перевірити шляхом розрахунку математичного очікування та дисперсії поляризованого та неполяризованого випромінювання. Для

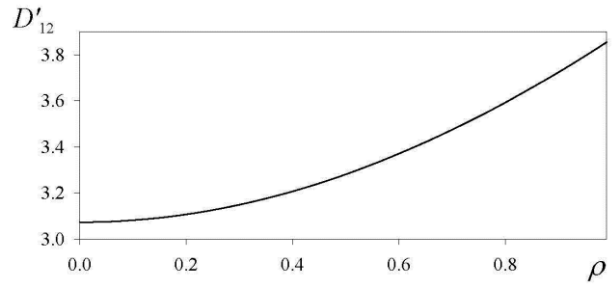


Рис. 3 – Залежність дисперсії  $D'_{12}$  від коефіцієнта кореляції  $|\rho|$ . Параметри розрахунку ті ж самі, що на рисунку 1

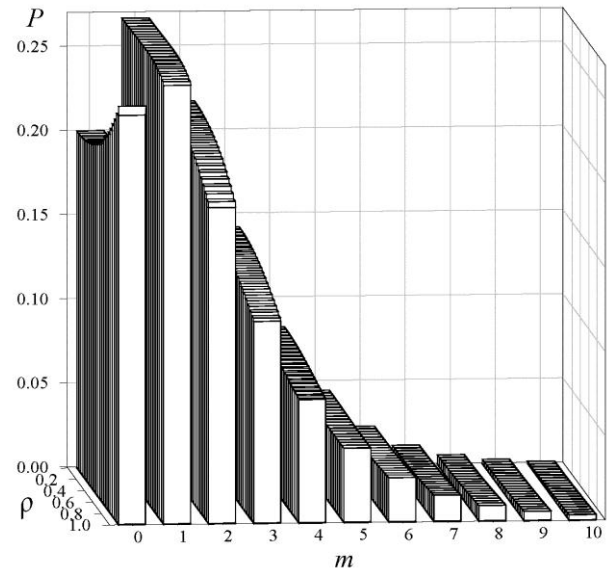


Рис. 4 – Статистика фотовідліків при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^8$  с $^{-1}$ ,  $\nu = 10^8$  Гц,  $T = 10^{-8}$  с

однієї поляризаційної моди із сумарною інтенсивністю  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  перший момент дорівнює  $\langle m \rangle_{12} = (\sigma_1 + \sigma_2)T$ . Той самий результат отримуємо і у випадку  $|\rho| = 0$ . За відсутності кореляційного зв'язку для дисперсії  $D_{12}$  розподілу числа фотовідліків маємо

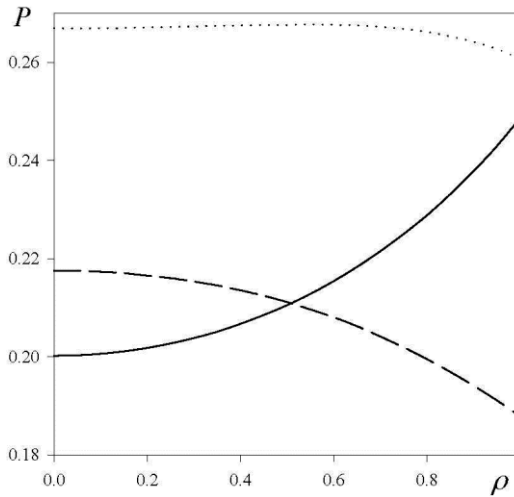
$$D_{12} = \langle m \rangle_{12} + \left( \langle m \rangle_1^2 + \langle m \rangle_2^2 \right) \frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{2\nu^2 T^2}.$$

У випадку  $|\rho| \neq 0$  дисперсія дорівнює

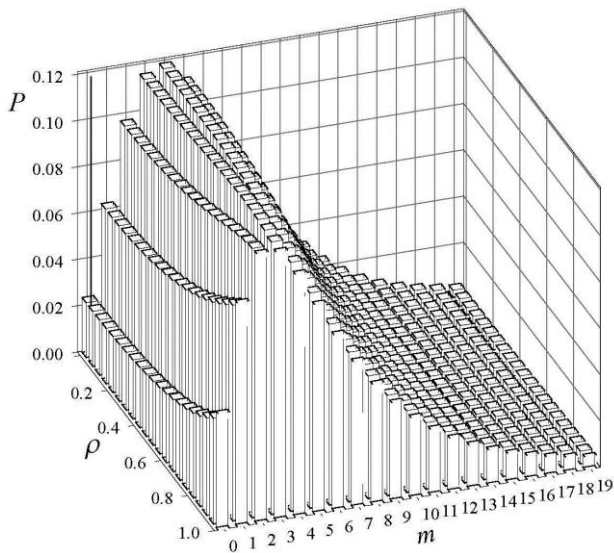
$$D'_{12} = \langle m \rangle_{12} + \left( \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2|\rho|^2 \sigma_1 \sigma_2 \right) \frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{2\nu^2}.$$

Порівнюючи два останні вирази, бачимо, що дисперсія  $D'_{12}$  містить додаткову складову  $\sigma_1 \sigma_2 |\rho|^2 (2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}) / \nu^2$ , яка зникає при  $|\rho| = 0$ .

Залежність дисперсії від коефіцієнта кореляції  $|\rho|$  наведена на рисунку 3. Як бачимо з рисунку при збільшенні  $|\rho|$  дисперсія зростає, так що різниця дисперсій  $D'_{12}(|\rho|=1) - D_{12}(|\rho|=0)$  складає приблизно 20%. Звідси можна зробити висновок, що наявність статистичного зв'язку між модами поляризації приводить до розширення в цілому розподілу амплітуд  $P_{12}(m)$  при незмінному першому моменті.



**Рис. 5** – Залежність амплітуди ймовірності від коефіцієнта кореляції  $|\rho|$  для  $m = 0$  (суцільна крива),  $m = 1$  (пунктир) та  $m = 2$  (штрих-пунктирна крива) фотовідліків. Параметри розрахунку ті ж самі, що на рисунку 4



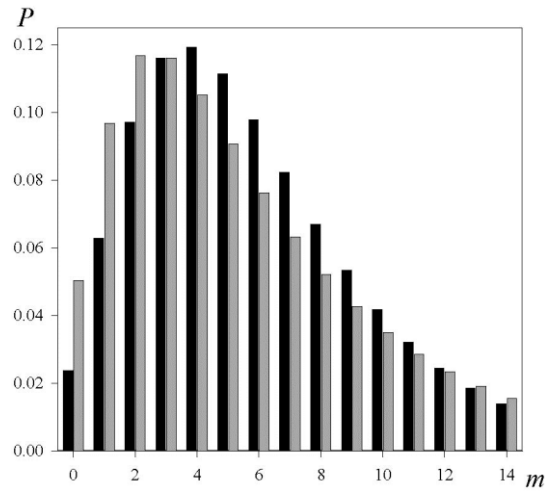
**Рис. 6** – Статистика фотовідліків при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 3 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$ ,  $\nu = 10^8 \text{ Гц}$ ,  $T = 10^{-8} \text{ c}$

При цьому степе́нь кореляції між компонентами неполяризованого випромінювання може бути визначена шляхом вимірювання дисперсії, що важливо при розв'язанні практичних задач.

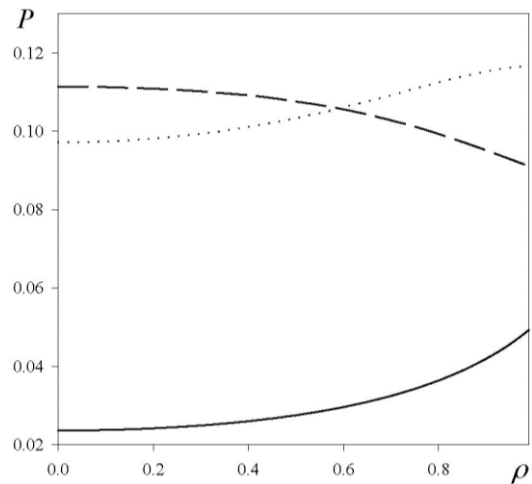
На рисунку 4 наведено розподіл амплітуд  $P_{12}(m)$  при різних значеннях коефіцієнта кореляції  $|\rho|$ .

Для аналізу представленої діаграми, побудуємо залежність  $P_{12}(|\rho|)$  для різної кількості фотовідліків  $m = 0, 1, 2$ . З рисунку 5 бачимо, що ймовірність реєстрації одного фотовідліку збільшується із збільшенням степеня кореляції між модами поляризації. І навпаки, ймовірність реєстрації двох або більше фотовідліків зменшується по мірі збільшення  $|\rho|$ .

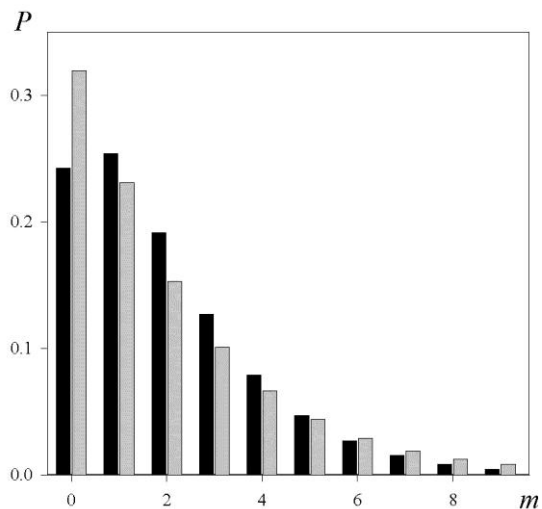
Вплив інтенсивності випромінювання на розподіл фотовідліків наведено на рисунках 6-8. З рисунків видно, що збільшення інтенсивності випромінювання приводить до розширення в цілому



**Рис. 7** – Статистика фотовідліків при  $|\rho| = 0$  (чорний колір) та  $|\rho| = 1$  (сірий колір). Інші параметри розрахунку ті ж самі, що на рисунку 6



**Рис. 8** – Залежність амплітуди ймовірності від коефіцієнта кореляції  $|\rho|$  для  $m = 0$  (суцільна крива),  $m = 3$  (пунктир) та  $m = 6$  (штрих-пунктирна крива) фотовідліків. Параметри розрахунку ті ж самі, що на рисунку 6



**Рис. 9** – Статистика фотовідліків при  $|\rho| = 0$  (чорний колір) та  $|\rho| = 1$  (сірий колір).  $\nu = 10^7 \text{ Гц}$ . Інші параметри розрахунку ті ж самі, що на рисунку 1

розподілу амплітуд ймовірності фотовідліків, при цьому ймовірність реєстрації великої кількості фотовідліків зменшується при підсиленні статистичного зв'язку.

Вплив ширини спектральної лінії  $\nu$  на розподіл фотовідліків наведено на рисунку 9. Як бачимо, зменшення  $\nu$  приводить до зсуву максимуму розподілу фотовідліків ліворуч.

#### 4. ВИСНОВОК

У роботі показано, що твірна функція для неполяризованого оптичного гаусівського випромінювання із кінцевим часом кореляції мод поляризації є добутком твірних функцій кожної із компонент випромінювання. При цьому матриця Стокса зводиться до діагональної форми, компонентами якої є ефек-

тивні інтенсивності мод випромінювання. Показано, що статистичний зв'язок між модами поляризації приводить до розширення розподілу амплітуд фотовідліків при незмінному першому моменті.

Зазначимо, що коефіцієнт кореляції  $\rho$  поляризаційних мод (також як і інші компоненти матриці Стокса) є інформаційно емним. В оптичних схемах, де інтенсивності  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  поляризаційних мод не змінюються, саме  $\rho$  впливає на дані спостереження. Відповідно, представлені результати можуть бути застосовані при побудові оптичних каналів зв'язку. Крім того, на основі розв'язку прямої задачі про статистику зареєстрованих фотовідліків можлива постановка оберненої задачі про ідентифікацію нерегулярностей в оптичному світловоді, що є перспективою розвитку даної роботи.

### Влияние корреляции между модами поляризации на статистические свойства гауссовского низкоинтенсивного излучения

А.С. Мазманишвили, И.А. Князь

*Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина*

В работе аналитически описано формирование статистики фотоотсчетов неполяризованного гауссового оптического излучения для случая, когда между модами поляризации существует статистическая связь. Получено аналитическое выражение для производящей функции фотоотсчетов рассматриваемого излучения. Рассчитаны распределения набора амплитуд вероятностей фотоотсчетов для излучения с коррелирующими и некоррелирующими модами. Показано, что статистическая связь между модами поляризации приводит к уширению в целом распределения фотоотсчетов при неизменном его первом моменте.

**Ключевые слова:** Статистика фотоотсчетов, Гауссовское излучение, Коррелирующие моды, Матрица Стокса.

### Influence of Correlation between Polarization Modes on Statistical Properties of Low-intensity Gaussian Radiation

A.S. Mazmanishvili, I.A. Knyaz'

*Sumy State University, 2, Rimsky Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine*

In the paper we analytically describe the formation of photocount statistics of non-polarized Gaussian optical radiation when there is a statistical link between the modes of polarization. Analytical expression for the generating function of photocounts was obtained. Distributions of a set of probability amplitudes for the cases of correlated and uncorrelated modes were calculated. It was shown, the statistical relationship between the modes of polarization leads to a broadening of the whole distribution of photocounts with the unchanged first moment.

**Keywords:** Photocount statistics, Gaussian radiation, Correlated modes, Stokes matrix.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Д.Ф. Смирнов, А.С. Трошин, *УФН* **153**, 233 (1987) (D.F. Smirnov, S.S. Troshin, *Sov. Phys. Usp.* **30**, 851 (1987)).
2. С.А. Ахманов, Ю.Е. Дьяконов, А.С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (Москва: Наука: 1981).
3. L. Mandel, *Proc. Phys. Soc.* **72**, 1037 (1958).
4. А.Г. Шереметьев, *Волоконный оптический гироскоп* (Москва: Радио и связь: 1987).
5. E. Collett, *Polarized light in fiber optics* (Polawave Group, New Jersey, USA: 2003).
6. A. Bononi, *Opt. Fiber Technol.* **8**, 257 (2002).
7. Я. Перина, *Когерентность света* (Москва: Мир: 1974). Д. Гудмен, *Статистическая оптика* (Москва: Мир: 1988).
8. В.И. Тихонов, М.А. Миронов, *Марковские процессы* (Москва: Сов. радио: 1977).
9. М. Лэкс, *Флуктуации и когерентные явления* (Москва: Мир: 1974).
10. Р. Глаубер, *Оптическая когерентность и статистика отсчетов* (Москва: Мир: 1974).
11. А.С. Мазманишвили, *Континуальное интегрирование как метод решения физических задач* (Киев: Наукова думка: 1987).