

Численный метод проектирования несингулярного плаща-ковра невидимости произвольной формы

В.И. Вьюнник*, А.А. Звягинцев

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина

(Получено 03.04.2012; опубликовано online 07.11.2012)

В работе предложено использование несингулярного плаща невидимости в манере, характерной для ковра невидимости. Показана возможность полностью численного подхода к расчету несингулярного плаща невидимости произвольной формы, путем выбора эллиптической системы координат при координатной трансформации. Проведено численное моделирование несингулярных плащей и плащей-ковров произвольной формы и произведена оценка эффективности их работы.

Ключевые слова: Несингулярный плащ невидимости, Ковер невидимости, Численный метод, Координатная трансформация, Уравнения Пуассона.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Fx, 02.40.-k, 02.70.Dh

1. ВВЕДЕНИЕ

Созданию устройств (плащей) невидимости путем координатной трансформации посвящены многочисленные работы, начиная с пионерской работы [1]. При таком традиционном подходе, например, при создании цилиндрического плаща, осуществляется геометрическая трансформация, при которой круг отображается в кольцевую область. Соответственно точка в центре круга отображается на внутреннюю границу плаща. Так как электромагнитная волна проходит точку за бесконечно малое время, при раздувании точки в окрестность возникает сингулярность материальных параметров.

Одним из новых подходов в решении данной проблемы является использование ковра невидимости [2]. При этом скрываемый объект располагается на плоскости, и трансформация (раздувание) осуществляется не от точки, а от плоскости (от линейного сегмента в двумерной задаче). В работе [2] также показана возможность создания изотропного ковра, в котором, например, компоненты магнитной проницаемости задаются константой (а не тензором), в то время как компонента диэлектрической проницаемости зависит, в общем случае, от одной координаты (двумерная задача). Однако, как показано в работе [3] изотропный ковер создает боковой сдвиг отраженного пучка и, таким образом, оказывается детектируемым.

В работе [4] представлен несингулярный эллиптический плащ, внутренняя эллиптическая граница которого образуется путем координатной трансформации из линейного сегмента, соединяющего фокусы эллипса. Такой плащ, однако, идеально работает только при условии, что он облучается параллельно большей оси эллипса (и при условии, что межфокусное расстояние меньше длины волны).

В настоящей работе продемонстрирована возможность использования такого эллиптического плаща подобно ковру невидимости, располагая его большую полуось на проводящей плоскости (плащ-ковер). Нами также адаптирован численный подход к конструированию плаща, представленный в работах [5], [6] к несингулярному плащу. Это позволяет создание несингулярных плащей-ковров произвольной формы.

2. ПОДХОД, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ КОНСТРУИРОВАНИИ ПЛАЩА

Рассмотрим, прежде всего координатную трансформацию в системе координат эллиптического цилиндра, как изображено на рисунке 1.

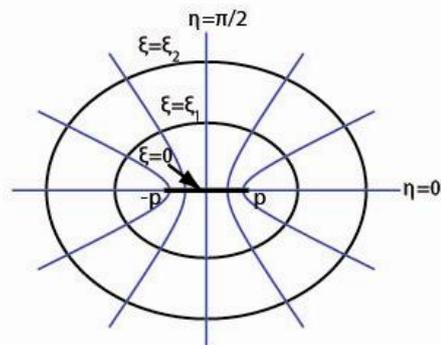


Рис. 1 – Эллиптический плащ в эллиптической координатной системе

В работе [4] показано, что пространственное преобразование от эллиптической области $\xi \in [0, \xi_2]$ к области эллиптического кольца $\xi' \in [\xi_1, \xi_2]$ может быть представлено в виде:

$$\xi' = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2} \xi + \xi_1; \quad \eta' = \eta; \quad z' = z. \quad (1)$$

Важным моментом является то, что в системе координат эллиптического цилиндра мы имеем однозначное соответствие между координатами любой точки, лежащей на внутреннем эллипсе ($\xi' \in \xi_1$) и координатами исходной точки ($\xi \in \xi_0 = 0$), отображаемой на первую точку при координатной трансформации. Связь между координатами указанных выше точек может быть записана как

$$(0, \eta, z) \rightarrow (\xi_1, \eta, z). \quad (2)$$

* vladdal@gmail.com

Это делает возможным задание граничных условий для численных методов решения без необходимости аналитического анализа связей между координатами.

Перейдем теперь к описанию численного подхода к созданию плаща. Как показано в работе [7] при координатной трансформации компоненты материальных параметров в трансформированной системе связаны с компонентами материальных параметров в исходной системе следующими соотношениями:

$$\varepsilon' = \frac{J \varepsilon J^T}{\det(J)}; \mu' = \frac{J \mu J^T}{\det(J)}, \quad (3)$$

где J представляет Якобианову трансформационную матрицу, состоящую из элементов вида

$$J_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad (4)$$

которые представляют собой производную трансформированных координат по исходным координатам.

Эти элементы могут быть получены либо аналитически, определяя в явном виде зависимость между исходными и трансформированными координатами, подобно выражению (1), либо численными методами.

Численные методы имеют неоспоримые преимущества при создании плащей произвольной формы, ввиду, подчас крайней сложности получения аналитической зависимости между координатами при трансформации.

Чтобы продемонстрировать использование численного подхода к созданию несингулярных плащей, рассмотрим сначала его применение при создании эллиптического несингулярного плаща.

Эллиптическая область b с линейным сегментом, соединяющем фокусы эллипса a , отображается в эллиптическое кольцо $b'a'$ (см. рис. 2). При этом линейный сегмент a отображается на внутренний эллипс a' , а внешний эллипс b отображается на b' (т.е. фактически сам на себя).

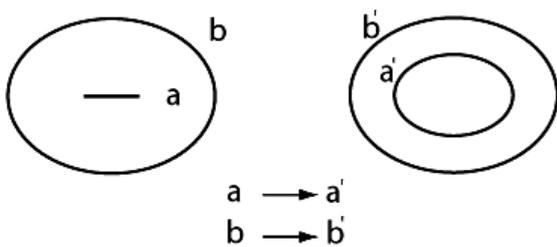


Рис. 2 – Координатная трансформация для эллиптического плаща

С учетом описанных выше граничных условий можно записать уравнение Пуассона в координатах эллиптического цилиндра, которое будет характеризовать связь между исходными и трансформированными координатами в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3^2} \right) u_i' &= f_i(u_1, u_2, u_3); \\ u'(a) &= a', \quad u'(b) = b', \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где u_i' ($i = 1, 2, 3$) обозначает компоненты трансформированной координатной системы, а u_1, u_2, u_3 – компоненты первоначальной (не трансформированной) координатной системы.

Необходимо отметить, что имеется бесконечное множество решений данного уравнения, получаемых выбором различных функций источника f . Это открывает возможность использования методов оптимизации с целью получения желаемых характеристик плаща (например, достижения минимального рассеяния) В настоящей работе мы принимаем $f = 0$.

С целью избежать сингулярных решений уравнения Пуассона, используется инверсная форма уравнения Пуассона подобно тому, как это сделано в работе [6] в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial u_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2'^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3'^2} \right) u_i &= f_i(u_1', u_2', u_3'); \\ u(a') &= a, \quad u(b') = b. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

В системе координат эллиптического цилиндра выражение (6) может быть записано как

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{p^2 (\sinh^2 \xi' + \sin^2 \eta')} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta'^2} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z'^2} &= f(\xi', \eta', z'); \\ \xi(\xi' = \xi_1) &= 0, \quad \xi(\xi' = \xi_2) = \xi_2. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Решая уравнение (7) мы получаем элементы обратной Якобиановой матрицы $J_i^{j'} = \partial x^j / \partial x^{i'}$ и затем находим прямую Якобианову матрицу, как $J_i^{i'} = (J_i^{i'})^{-1}$.

Несложно заметить, что уравнение (7) без всяких изменений может быть использовано для нахождения матрицы преобразования для несингулярного плаща невидимости произвольной формы, как изображено на рисунке 3.

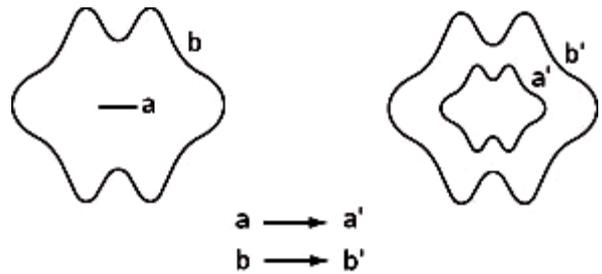


Рис. 3 – Координатная трансформация для плаща произвольной формы

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для численных экспериментов использовалась программа COMSOL Multiphysics обеспечивающая решение методом конечных элементов. Необходимо отметить, что COMSOL Multiphysics может работать только с декартовыми координатами, поэтому для задания граничных условий требуется преобразование из координат эллиптического цилиндра в декартовы координаты.

Рассмотрим двумерную задачу для случая падения E – поляризованной плоской волны. Известно, что

$$\begin{aligned} \xi &= \operatorname{Re} \left[a \cosh \left(\frac{x + iy}{p} \right) \right]; \\ \eta &= \operatorname{Im} \left[a \cosh \left(\frac{x + iy}{p} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом этого мы можем записать декартовые координаты любой "исходной" точки на линейном сегменте между полюсами эллипса в виде:

$$\begin{aligned} x_0 &= p \cosh(\xi_0 = 0) \cos(\eta); \\ y_0 &= p \sinh(\xi_0 = 0) \sin(\eta), \end{aligned} \quad (9)$$

и декартовые координаты точки на внутренней границе плаща, на которую отображается "исходная" точка в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= p \cosh(\xi_1) \cos(\eta); \\ y_1 &= p \sinh(\xi_1) \sin(\eta). \end{aligned} \quad (10)$$

Соответственно граничные условия примут вид:

$$x(x' = x_1) = x_0; \quad y(y' = y_1) = y_0. \quad (11)$$

Решая уравнения Пуассона (для x и y координат) вместе с граничными условиями (11) мы находим связь между трансформированными и исходными координатами, определяем элементы Якобиановой матрицы, и далее компоненты диэлектрической и магнитной проницаемостей ($\epsilon_{zz}, \mu_{xx}, \mu_{yy}, \mu_{yx}, \mu_{xy}$).

На рис. 4 представлен результат расчета E_z компоненты поля для эллиптического плаща невидимости, а на рисунке 5 – для плаща невидимости произвольной формы. В обоих случаях падающая волна распространяется вдоль линейного межфокусного сегмента, $p = 0.01$ м а $\lambda = 0.08$ м.

Для оценки эффективности работы несингулярного плаща и ее зависимости от величины p нами определялся интеграл по внешней границе геометрии задачи от абсолютного значения рассеянного электрического поля (для эллиптического плаща). Также было оценено рассеяние от проводящего линейного сегмента длиной $2p$ при различных величинах p и

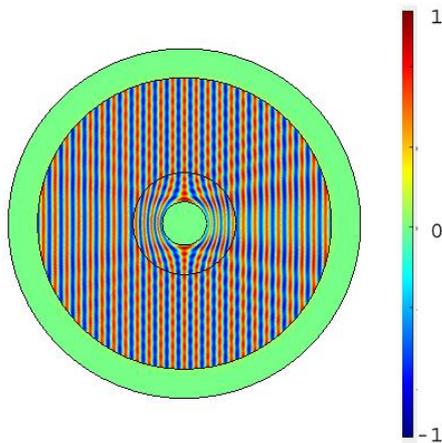


Рис. 4 – Распределение z -компоненты электрического поля вблизи эллиптического несингулярного плаща невидимости

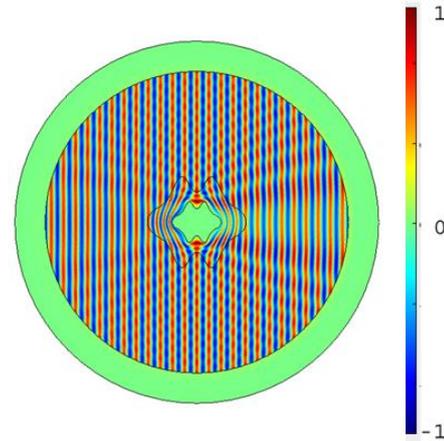


Рис. 5 – Распределение z -компоненты электрического поля вблизи несингулярного плаща невидимости произвольной формы

рассеяние от эллиптического сингулярного плаща. Полученные результаты представлены в таблице 1.

Здесь x_1 и y_1 – длины большой и малой полуосей внутреннего эллипса, x_2 и y_2 – длины соответствующих полуосей внешнего эллипса, p –полуфокусное расстояние, λ – длина волны, и $\int norm E_{far}$ – указанный выше интеграл. Все размеры даны в м, значение интеграла в вольтах.

Из таблицы видно, что величина интеграла рассеянного поля от несингулярного плаща очень близка к аналогичной величине при рассеянии от проводящего сегмента соответствующей длины и увеличивается с увеличением величины p аналогичным образом. Т. е. несингулярный плащ редуцирует рассеяние от проводящего эллипса до величины рассеяния от линейного сегмента, из которого этот эллипс получен (посредством координатных преобразований).

При $p = 0.001$ м величина рассеяния от несингулярного плаща практически совпадает с величиной рассеяния от сингулярного плаща. Хотя величина рассеяния от несингулярного плаща растет с ростом p , она все же остается величиной одного порядка с величиной рассеяния от сингулярного плаща при достаточно малых p .

Как уже было указано ранее, такой несингулярный плащ может быть использован подобно ковру невидимости, при расположении межфокусного сегмента на идеально проводящей поверхности (представляющей собой линию для двумерной задачи).

На рис. 6 показана работа подобного плаща-ковра: отражение Гауссова пучка от эллиптического плаща невидимости (E_z компонента), а на рис. 7 от плаща невидимости произвольной формы (E_z компонента). В обоих случаях $p = 0.01$ м, $\lambda = 0.08$ м.

Также показано огибание пучком плаща-ковра невидимости (рис. 8 и 9), когда пучок распространяется горизонтально (параллельно базовой проводящей поверхности).

Также показана возможность использования полученного подхода при расчете плаща-ковра произвольной формы.

Проведенное численное моделирование с использованием метода конечных элементов подтвердило работоспособность такого подхода. Было показано, что плащ уменьшает рассеяние от проводящего эллиптического цилиндра (эллипса в двумерной задаче) до величин, характерных для рассеяния от проводящего сегмента соответствующей длины (сегмента длиной $2r$, который "раздувается" в эллипс при трансформации).

Также проведено сравнение эффективности работы несингулярных плащей при различных значениях величины r и сингулярного плаща. Показано, что

эффективность несингулярного плаща сравнима с эффективностью сингулярного плаща (имеет один порядок величины) при условии малости p ($p < \lambda$), и растет при уменьшении p , становясь практически равной эффективности сингулярного плаща.

Следует отметить, что уравнения Пуассона, решаемые нами для нахождения матрицы преобразования, имеют бесконечное множество решений, определяемых различными функциями-источниками. Это позволяет искать "предпочтительные" решения, используя методы оптимизации.

Design Numerical Method for Nonsingular Invisibility Cloak-Carpet with Arbitrary Shapes

V. I. Vyunnik, A. A. Zvyagintsev

V.N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq. 4, 61022 Kharkiv, Ukraine

The using of the nonsingular invisibility cloak similarly as invisibility carpet was proposed. The possibility of fully numerical approach to calculation arbitrary nonsingular invisibility cloak, by a choice of elliptic coordinate system during coordinate transformation, was shown. The numerical modeling nonsingular cloak and cloak-carpet of arbitrary form and the estimation of efficiency while using, was completed.

Keywords: Nonsingular invisibility cloak, Invisibility carpet, Numerical method, Coordinate transformation, Poisson's equation.

Числовий метод проектування несингулярного плаща-килима невидимості довільної форми

В.І. В'юник, А.О. Звягінцев

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, 61022, Харків, Україна

У роботі запропоновано використання несингулярного плаща невидимості в манері, характерній для килима невидимості. Показана можливість повністю чисельного підходу до розрахунку несингулярного плаща невидимості довільної форми, шляхом вибору еліптичної системи координат при координатній трансформації. Проведені чисельне моделювання несингулярних плащів і плащів-килимів довільної форми і оцінка ефективності їх роботи.

Ключові слова: Несингулярний плащ невидимості, Килим невидимості, Числовий метод, Координатна трансформація, Рівняння Пуассона.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith, *Science* **312**, 1780 (2006).
 2. J. Li, J.B. Pendry, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 203901 (2008).
 3. B. Zhang, T. Chan, B.-I. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 233903 (2010).
 4. W.X. Jiang, T.J. Cui, X.M. Yang, Q. Cheng, R. Liu, D. R. Smith, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 194102 (2008).
 5. J. Hu, X. Zhou, G. Hu, *Opt. Express* **17**, 1308 (2009).
 6. J.J. Ma, X.Y. Cao, K.M. Yu, T. Liu, *Prog. Electromagn. Res. M* **9**, 177 (2009).
- M. Rahm, D. Schurig, D.A. Roberts, S.A. Cummer, D.R. Smith, *Photon. Nanostruct. Fundam. Appl.* **6**, 87 (2008).