

Вплив спектральних характеристик корелюючих шумів на поведінку стохастичної системи

І.О. Князь*

Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007 Суми, Україна

(Одержано 01.02.2012; опубліковано online 04.06.2012)

У роботі розглянуто вплив крос-кореляційних спектральних характеристик корелюючих кольорових джерел шуму на поведінку синергетичної системи. Показано, що збільшення часу крос-кореляції адитивного та мультиплікативного шумів нижче точки біфуркації приводить до реалізації індукованого шумом переходу до упорядкованої фази. У випадку непарної мультиплікативної функції перехід до низькочастотного шуму є причиною відновлення симетрії функції розподілу. Усі теоретичні результати підтверджуються чисельним експериментом.

Ключові слова: індукований шумом перехід, кольорові флуктуації, адитивний шум, час крос-кореляції.

PACS numbers: 05.70.Fh, 05.40. – a, 05.10.Gg

1. ВСТУП

Феномен індукованих шумом переходів (ІПП) займає важливе місце серед явищ, пов'язаних із нетривіальним впливом шуму на поведінку нелінійних систем. Яскравим прикладом такого переходу є зміна форми стаціонарної функції розподілу від унімодалльної до бімодалльної за рахунок варіації інтенсивності шуму [1].

Треба зазначити, що великий літературний матеріал, який охоплює ІПП у нелінійних системах, базується на розгляданні границі слабо-корельованого шуму. При цьому в основному увага зосереджується на визначенні ролі зовнішнього шуму, у той час як внутрішні флуктуації вважаються доволі вивченими і тому загалом їх впливом нехтують. Однак, як показано у ряді робіт (див, наприклад, [2-4]) наявність виділених частот у спектрі шуму (кольоровий шум) може суттєвим чином змінити динаміку системи. При цьому, оскільки динаміка системи стає корельованою із флуктуаціями, внутрішній шум перестає відігравати нетривіальну роль, істотним чином впливаючи на поведінку системи. Так, наприклад, варіація спектральних характеристик кольорового шуму може стати причиною реалізації реверсивних фазових переходів у просторово-розподілених системах [5].

Таким чином, до теперішнього часу остаточно не вивченим є питання впливу спектральних характеристик кольорових внутрішніх шумів на поведінку системи. Відкритим, на сьогодні, також залишається питання про існування ІПП у широкому класі нелінійних систем, оскільки в літературі висвітлені лише окремі моделі стохастичних систем. Крім того цікавим є питання про вплив корелюючих шумів на поведінку стохастичної системи [6-11]. Наприклад, завдяки крос-кореляції адитивного та мультиплікативного білих шумів у системі із квадратичним потенціалом можливим стає унімодалний-бімодалний перехід [12]. При цьому за відсутності крос-кореляції або автономній дії кожного з цих шумів такий перехід не спостерігається.

Треба зазначити, що моделювання широкого кола фізичних явищ та систем неможливе без урахування сукупної дії декількох корелюючих шумів (лазерні системи [13], процеси структуроутворення у рідких кристалах [14], еволюція системи дефектів при пластичній деформації [15], тощо). Опис реальних систем потребує врахування впливу декількох шумів із ненульовим часом авто- та крос-кореляції, які у широкому діапазоні спектральних характеристик достатньо правдоподібно моделюють реальні флуктуації. У роботі [16] було показано, що взаємна кореляція кольорових шумів, один з яких характеризується непарною мультиплікативною функцією, є причиною порушення симетрії стаціонарної функції розподілу. Однак, оскільки основний акцент у роботі зроблений на вивченні умов реалізації переходів, пов'язаних із порушенням симетрії функції розподілу, роль спектральних крос-кореляційних характеристик шуму залишилася не вивченою. Таким чином, на сьогодні актуальною є задача виявлення умов реалізації ІПП, індукованих крос-кореляційними властивостями флуктуацій, у синергетичній системі із адитивними шумами кожної із мод.

У представлений роботі подано додаткові результати, які не освітлені у роботі [16], а саме показано, що варіація часу крос-кореляції шумів в околі точки біфуркації при достатній інтенсивності адитивного шуму може викликати ІПП (у класі систем із парною мультиплікативною функцією) або бути причиною відновлення симетрії функції розподілу, якщо мультиплікативна функція є непарною.

2. МОДЕЛЬ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У якості моделі стохастичної системи розглянемо відому синергетичну систему Лоренца, узагальнену за рахунок уведення кольорових шумів кожної із мод:

$$\begin{aligned}t_x \dot{x} &= -x + a_x h + \zeta_x(t), \\t_h \dot{h} &= -h + a_h x e + \zeta_h(t), \\t_e \dot{e} &= e_0 - e - a_e x h + \zeta_e(t),\end{aligned}\tag{1}$$

* knigorua@mail.ru

де перші доданки описують автономну релаксацію гідродинамічної моди x та спряженого поля h із часовими масштабами t_x, t_h до стаціонарних значень $x_0 = h_0 = 0$; керуючий параметр e релаксує до значення e_0 із часом t_e ; мірою зворотного зв'язку є константи a_x, a_h, a_e .

Принципово важливим є реалізація у представленій системі принципу Ле-Шательє: оскільки збільшення керуючого параметра e сприяє самоорганізації системи, параметр порядку та спряжене поле змінюються так, щоб обмежити зростання e . Реалізація даного принципу представлена негативним зв'язком між x та h . Позитивний зв'язок між x та e приводить до збільшення спряженого поля і є причиною самоорганізації. Останні члени у рівняннях описують флуктуації амплітуди гідродинамічної моди $\zeta_x(t)$, спряженого поля $\zeta_h(t)$ і керуючого параметра $\zeta_e(t)$. У якості моделі кольорового шуму виберемо процес Орнштейна-Уленбека (ОУ) [17, 18], який має експоненціально-спадну кореляційну функцію:

$$\langle \zeta_\mu(t) \zeta_\nu(t') \rangle = \kappa_{\mu\nu} \frac{\sigma_\mu \sigma_\nu}{\tau_{\mu\nu}} \exp(-|t-t'|/\tau_{\mu\nu}), \quad (2)$$

де $\mu, \nu = \{x, h, e\}$, $\kappa_{\mu\nu}$ – міра крос-кореляційного зв'язку ($\kappa_{\mu\nu} = 1$ при $\mu = \nu$), $\tau_{\mu\nu}$ – час авто- або крос-кореляції, σ_μ – інтенсивність шуму. Характерно, що процес ОУ зводиться до білого шуму нижче граничної частоти $\omega \ll \tau_{\mu\nu}^{-1}$. Інакше кажучи, у випадку $\tau_{\mu\nu} \rightarrow 0$ кореляційна функція (2) переходить у дельта-функцію. Це означає, що для процесу $\zeta_\mu(t)$ існує рівняння еволюції у вигляді

$$\tau_{\mu,\mu} \dot{\zeta}_\mu = -\zeta_\mu + \sigma_\mu \xi_\mu(t), \quad (3)$$

де $\xi_\mu(t)$ – білий шум.

Зазначимо, що представлена модель придатна для опису багатьох фізичних явищ. Так, наприклад, детерміністичний аналог моделі (2) вперше був застосований для опису нестійкостей у лазерних системах [19]. Пізніше він був використаний для пояснення виникнення нового структурного рівня у в'язких текучих середовищах за наявності градієнту температури [20] та інтерпретації експериментальних даних поведінки системи дефектів при інтенсивному навантаженні [21-23].

Слідуючи [19], за рахунок уведення умови $t_x \gg t_h, t_e$ виконаємо адіабатичне вилучення змінних. Дана процедура дозволяє вилучити швидкі моди у (2) та отримати еволюційне рівняння для повільної моди x [24], [5]:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_\mu g_\mu(x) \zeta_\mu(t), \quad (4)$$

де детерміністична сила $f(x)$ пов'язується із синергетичним потенціалом

$$V(x) = \frac{1}{2} [x^2 - \theta \ln(1+x^2)] \quad (5)$$

$$D_1(x) = -\frac{x}{(1+x^2)^5} \left\{ x^{10} - x^8(\theta-5) - x^6 [K(\tau_{x,h}-1) + 4\theta - 10] - x^4 [K(\tau_{x,h}(\theta+3)-3) + 6\theta - 2\sigma_h^2(\tau+1) - 10] - x^2 [3K(\tau_{x,h}-1) - 2\sigma_h^2(2-3\tau\theta) + 4\theta - 5] - K(1+\tau_{x,h}(1-\theta)) - 2\sigma_h^2(1+\tau(\theta+1)) + \theta - 1 \right\},$$

стандартним чином: $f(x) = -dV/dx$. Параметр зовнішнього впливу $\theta \sim \varepsilon_0$ відіграє роль керуючого параметра. Мультиплікативні функції у рівнянні (4) мають вигляд

$$g_x = 1, \quad g_h(x) = (1+x^2)^{-1}, \quad g_e(x) = xg_h. \quad (6)$$

Для дослідження статистичних властивостей системи (4) необхідно знати функцію розподілу $P(x)$, рівняння еволюції якої може бути одержано за допомогою методу розвинення за кумулянтами [25] – [27]. Застосований підхід (деталі див. у додатку) дозволяє побудувати теорію збурень з малим параметром, що являє собою автокореляційний або крос-кореляційний час, і отримати ефективне рівняння Фоккера-Планка.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-D_1(x) + \frac{\partial}{\partial x} D_2(x) \right) P(x,t), \quad (7)$$

де

$$D_1(x) = f + \sum_{n=0}^1 D_1^{(n)}(x), \quad D_2(x) = \sum_{n=0}^1 D_2^{(n)}(x), \quad (8)$$

$$D_1^{(0)} = \sum_{\mu,\nu} M_{\mu\nu}^{(0)} g_\mu \frac{\partial g_\nu}{\partial x}, \quad D_2^{(0)} = \sum_{\mu,\nu} M_{\mu\nu}^{(0)} g_\mu g_\nu, \quad (9)$$

$$D_1^{(1)} = \sum_{\mu,\nu} M_{\mu\nu}^{(1)} \frac{\partial g_\nu}{\partial x} \left[f \frac{\partial g_\mu}{\partial x} + g_\mu \frac{\partial}{\partial x} f \right], \quad (10)$$

$$D_2^{(1)} = \sum_{\mu,\nu} M_{\mu\nu}^{(1)} g_\nu \left[f \frac{\partial g_\mu}{\partial x} + g_\mu \frac{\partial}{\partial x} f \right], \quad (11)$$

$$M_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \tau^n C_{\mu\nu}(t, t-\tau) d\tau. \quad (12)$$

Стаціонарний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$P(x) = N^{-1} D_2^{-1}(x) \exp \left(\int_0^x \frac{D_1(x')}{D_2(x')} dx' \right), \quad (13)$$

де нормуюча стала задається виразом

$$N = \int_{-\infty}^\infty D_2^{-1}(x) \exp \left(\int_0^x \frac{D_1(x')}{D_2(x')} dx' \right) dx.$$

3. РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо випадок скорельованої дії адитивного шуму та мультиплікативного шуму з мультиплікативною функцією $g_h(x) = 1/(1+x^2)$. На основі моментів кореляційної функції (12) розрахуємо дрейфову та дифузійну складові (8), при цьому для спрощення представлення покладемо $\tau = \tau_{x,x} = \tau_{h,h}$, $\kappa = \kappa_{\mu,\nu}$. У результаті маємо

$$D_2(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^4} \left\{ x^8 \sigma_x^2 (\tau-1) + x^6 \left[\sigma_x^2 (\tau(\theta+4)-4) - K \right] + x^4 \left[\sigma_x^2 (\tau(\theta+6)-6) - \sigma_h^2 (\tau+1) + K(\tau_{x,h}(2\theta+1)-3) \right] + x^2 \left[\sigma_x^2 (\tau(4-\theta)-4) + \sigma_h^2 (3\tau\theta-2) + K(\tau_{x,h}(\theta+2)-3) \right] - K(1-\tau_{x,h}(1+\theta)) + \sigma_x^2 (\tau(1-\theta)-1) - \sigma_h^2 (1+\tau(\theta-1)) \right\},$$

де $K = 2\kappa\sigma_x\sigma_h$.

Аналізуючи два останні вирази, помітимо, що роль коефіцієнта крос-кореляції K не зводиться просто до перенормування часу крос-кореляції $\tau_{x,h}$: він відіграє роль окремого параметра, роль якого має бути розглянута окремо.

Для з'ясування умов виникнення упорядкованої фази при зміні часу крос-кореляції $\tau_{x,h}$ розглянемо рівняння екстремумів функції розподілу:

$$D_1(x) - \frac{d}{dx} D_2(x) = 0. \quad (14)$$

Підставляючи $D_1(x)$ та $D_2(x)$ у (14), маємо

$$x_0^{10} + (5-\theta)x_0^8 + \left[2\theta(\tau\sigma_x^2 - 2) - 2K(1+\tau_{x,h}) + 10 \right] x_0^6 + \left[2K(\tau_{x,h}(1+7\theta)-3) - 2\tau(\sigma_h^2 + \sigma_x^2) - 6\theta - 2\sigma_h^2 + 10 \right] x_0^4 + \left[2K(\tau_{x,h}(5-2\theta)-3) - 2\theta(\tau(5\sigma_x^2 - 6\sigma_h^2\theta) + 2) - 4\sigma_h^2(1-\tau) + 5 \right] x_0^2 - 2K(1-3\tau_{x,h}(1-3\theta)) - 2\sigma_h^2(1+3\tau(2\theta-1)) - \theta(1+6\tau\sigma_x^2) + 1 = 0,$$

де x_0 – положення точки екстремуму функції розподілу. Чисельний розв'язок останнього рівняння наведено на рис. 1

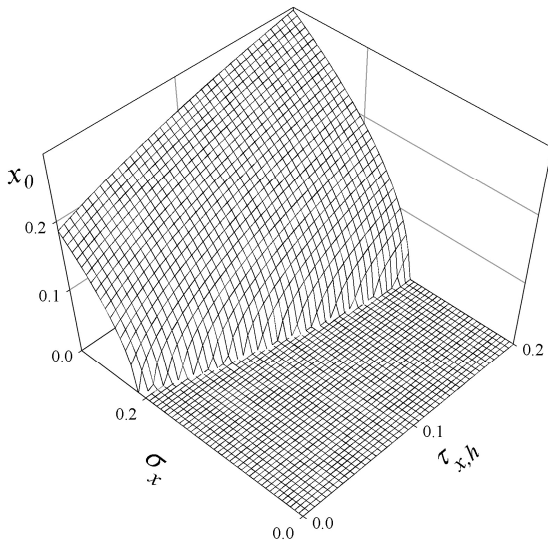


Рис. 1 – Положення точки екстремуму функції розподілу у залежності від інтенсивності адитивного шуму σ_x та часу крос-кореляції $\tau_{x,h}$. Значення параметрів системи: $\theta = 0.8$, $\tau_x = \tau_h = 0.1$, $\sigma_h = 0.2$, $\kappa = 1$

Зазначимо, що при $\theta < 1$ вихідний потенціал (5) має єдиний глобальний мінімум у точці $x_0 = 0$ (неупорядкована фаза). Однак, як бачимо з рис. 1, збільшення σ_x при $\theta < 1$ приводить до реалізації переходу системи до упорядкованої фази ($x_0 \neq 0$). При цьому в обмеженому домені значень інтенсивності флуктуацій (в околі значень $\sigma_x = 0.2$ на рис.1) час крос-кореляції $\tau_{x,h}$ відіграє ключову роль: збільшення $\tau_{x,h}$ при фіксованому значенні σ_x є причиною реалізації переходу до упорядкованої фази. Таким чином, при ненульових значеннях часу крос-кореляції ППП відбувається при тим менших значеннях керуючого параметра θ , чим більший час крос-кореляції шумів $\tau_{x,h}$.

Розраховуючи другу похідну від (14) у точці $x_0 = 0$, отримуємо лінію розділу двох фаз:

$$\tau_{x,h} = -\frac{6\tau\theta(\sigma_x^2 + 2\sigma_h^2) + 2\sigma_h^2(1-3\tau) + 2K + \theta - 1}{K(3\theta-1)}. \quad (15)$$

На рис. 2 показана біфуркаційна діаграма, побудована у відповідності із виразом (15).

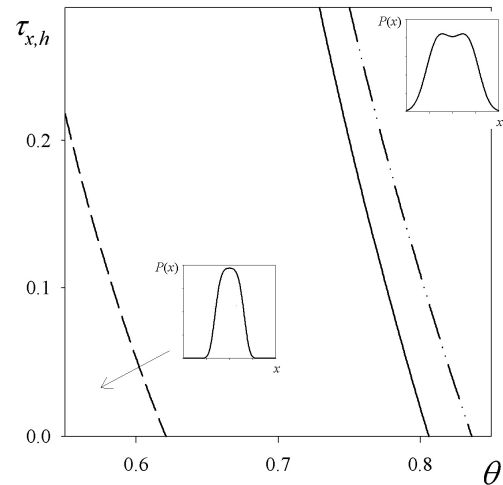


Рис. 2 – Фазова діаграма при $\kappa = 1$. Нижче кривих – неупорядкована фаза, вище кривих – упорядкована. На вставках показано вигляд функції розподілу у відповідних областях. Значення параметрів системи: $\sigma_x = \sigma_h = 0.2$, $\tau_x = \tau_h = 0.1$ (суцільна крива); $\sigma_x = 0.5$, $\sigma_h = 0.2$, $\tau_x = \tau_h = 0.1$ (штрихувана крива); $\sigma_x = \sigma_h = 0.2$, $\tau_x = \tau_h = 0.01$ (штрихпунктирна крива)

З рисунка видно, що збільшення часу автокореляції τ_x або τ_h фактично не впливає на положення точки переходу θ_c . Перехід до високочастотних флуктуацій (білого шуму) приводить до незначного зсування θ_c праворуч. З іншого боку, інтенсивність шуму σ_x суттєвим чином зсуває точку фазового переходу у бік малих значень керуючого параметра θ .

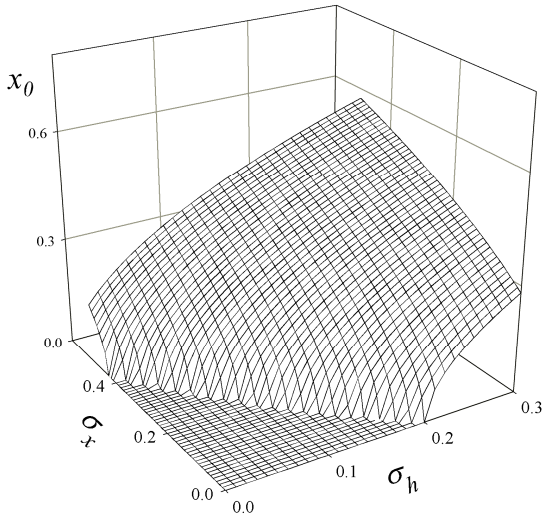


Рис. 3 – Положення екстремумів функції розподілу у залежності від інтенсивності адитивного σ_x та мультиплікативного σ_h шумів. Значення параметрів системи: $\theta = 0.9$, $\tau_x = \tau_h = \tau_{x,h} = 0.1$, $\kappa = 1$

З рис. 3 видно, що адитивний шум, який корелює із мультиплікативним шумом, суттєвим чином може змінити поведінку системи у той самий спосіб як і мультиплікативний шум. Важливо відмітити, що перехід до упорядкованої фази при малих значеннях інтенсивності мультиплікативного шуму σ_h можливий лише за рахунок адитивного шуму.

У зв'язку з тим, що застосований теоретичний аналіз будуватиметься на розвиненні за часом кореляції, виникає важливе питання чи не є отримані результати наслідком теоретичних наближень. Правдоподібність аналітичних розрахунків була перевірена за допомогою комп'ютерного експерименту, у рамках якого рівняння (3) – (6) розв'язувались безпосередньо модифікованим методом Ейлера. Початкові умови $x(0)$ та $\zeta_{\mu}(0)$ вибиралися випадковим чином із інтервалу $[-0.5, 0.5]$. Для розрахунку стаціонарної функції розподілу були усереднені результати 100 незалежних експериментів. Крок інтегрування за часом $\Delta t = 10^{-2}$; час експерименту – $5 \cdot 10^5$ кроків при цьому перші 10^5 кроків (час переходу системи у стаціонарний стан) було опущено. Для отримання багатовимірного випадкового процесу із кореляційною матрицею (2) застосовано чисельну схему, наведену у [16].

На рис. 4 наведені результати чисельного експерименту, накладені на результати теоретичних розрахунків за формулою (13). Як бачимо з рисунку при малих інтенсивностях адитивного шуму σ_x функція розподілу є унімодальною із максимумом у точці $x_0 = 0$ і найбільш ймовірне значення співпадає із точкою стійкої рівноваги у детерміністичному випадку. При збільшенні часу крос-кореляції $\tau_{x,h}$ функція розподілу трансформується у бімодальну із двома симетричними максимумами ($x_{0+} \neq 0$ та $x_{0-} \neq 0$) і найбільш ймовірне значення стану системи не співпадає із мінімумом детерміністичного потенціалу (5). Таким чином результати комп'ютерного експерименту якісно співпадають із теоретичними розрахунками, що говорить про правомірність використаних наближень та коректність використаного підходу у цілому.

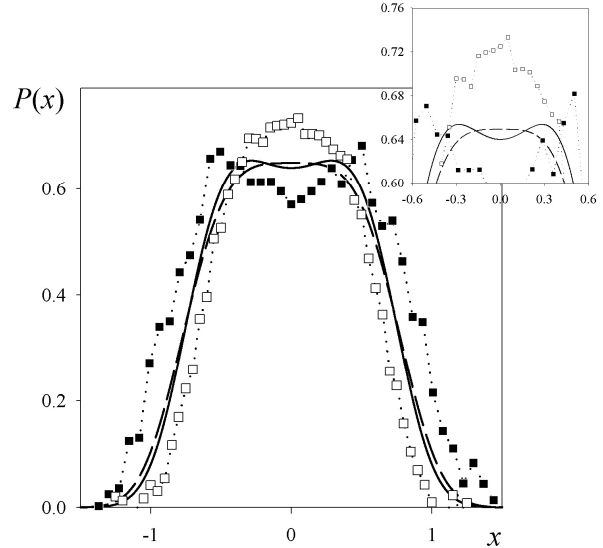


Рис. 4 – Стаціонарна густина розподілу при $\theta = 0.8$, $\kappa = 1$, $\tau_x = \tau_h = 0.1$, $\sigma_x = \sigma_h = 0.2$. Результати комп'ютерного експерименту представлені маркерами. Значення параметрів: $\tau_{x,h} = 0.01$ (штрихована крива та білі маркери), $\tau_{x,h} = 0.1$ (суцільна крива та чорні маркери)

Розглянемо випадок скорельованої дії адитивного шуму та мультиплікативного шуму з мультиплікативною функцією $g_e(x) = x/(1+x^2)$. На основі моментів кореляційної функції (12) розрахуємо дрейфову та дифузійну складові (8):

$$D_1(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^5} \sum_{i=0}^{11} a_i x^i, \quad (16)$$

$$D_2(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^4} \sum_{i=0}^8 b_i x^i,$$

де

$$a_0 = -K[1 + \tau_{x,e}(\theta - 1)], \quad a_1 = -[2\tau\sigma_e^2 + 1](\theta - 1) - \sigma_e^2,$$

$$a_2 = K[\tau_{x,e}(2 + \theta) - 2], \quad a_3 = -4\theta(1 + \tau\sigma_e^2) - \sigma_e^2 + 5,$$

$$a_4 = K\tau_{x,e}\theta, \quad a_5 = -\sigma_e^2[2\tau(\theta + 1) - 1] - 6\theta + 10,$$

$$a_6 = -K[\tau_{x,e}(\theta + 2) - 2], \quad a_7 = \sigma_e^2 - 4\theta + 10,$$

$$a_8 = K(1 - \tau_{x,e}), \quad a_9 = 5 - \theta, \quad a_{10} = 0, \quad a_{11} = 1,$$

$$b_0 = \sigma_x^2[\tau(1 - \theta) - 1], \quad b_1 = 3\tau_{x,e}(1 - \theta) - 2,$$

$$b_2 = \sigma_x^2[\tau(4 - \theta) - 4] + \sigma_e^2[2\tau(1 - \theta) - 1],$$

$$b_3 = K(7\tau_{x,e} - 6),$$

$$b_4 = \sigma_x^2[\tau(6 + \theta) - 6] + \sigma_e^2[2\tau(1 + \theta) - 2],$$

$$b_5 = K[\tau_{x,e}(3\theta + 5) - 6], \quad b_6 = \sigma_x^2[\tau(\theta + 4) - 4] - \sigma_e^2,$$

$$b_7 = K(\tau_{x,e} - 2), \quad b_8 = \sigma_x^2(\tau - 1).$$

На рис. 5 наведені результати чисельного експерименту, накладені на результати теоретичних розрахунків за формулою (13).

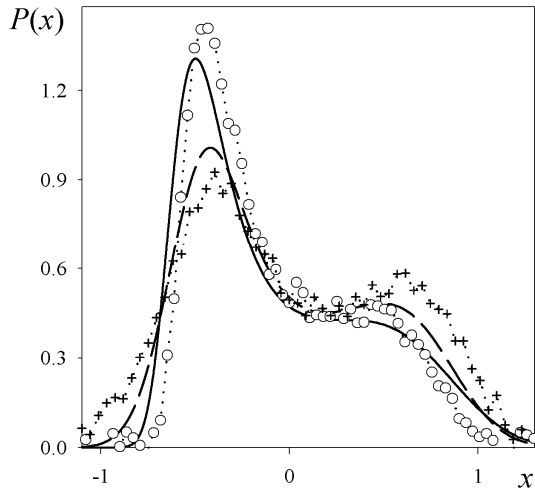


Рис. 5 – Стационарна густина розподілу при $\theta = 1.2$, $\kappa = 1$, $\tau_x = \tau_e = 0.1$, $\sigma_x = \sigma_e = 0.2$. Результати комп'ютерного експерименту представлені маркерами. Значення параметрів: $\tau_{x,e} = 0.01$ (суцільна крива та білі кола), $\tau_{x,e} = 0.1$ (штрихована крива та чорні перехрестя)

Як бачимо з рисунка, у випадку непарної мультиплікативної функції симетрія функції розподілу порушується. Цікавим є той факт, що у даному випадку вплив коефіцієнта крос-кореляції K є цілком протилежним до впливу часу крос-кореляції $\tau_{x,e}$: збільшення $\tau_{x,e}$ сприяє відновленню симетрії функції розподілу.

Порушення симетрії функції розподілу надає можливість характеризувати стан системи параметром порядку $\eta = \langle x \rangle$, при цьому упорядкованій фазі відповідає $\eta \neq 0$, неупорядкованій – $\eta = 0$. Під ШПП будемо розуміти порушення симетрії функції розподілу (або її відновлення) за рахунок впливу шуму.

Для вивчення впливу спектральних характеристик шуму на ШПП у даній системі розглянемо залежність параметра порядку η , нормованої дисперсії

$$d_2 = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x \rangle^2} - 1$$

та асиметрії

$$d_3 = \frac{\langle x^3 \rangle}{\langle x \rangle^3} - 3d_2 - 1$$

від часу крос-кореляції $\tau_{x,e}$. Зазначені залежності наведені на рис. 6. Як бачимо з рисунка, при збільшенні $\tau_{x,e}$ параметр порядку прямує до нуля, дисперсія d_2 збільшується, а асиметрія d_3 , навпаки, зменшується, що віддзеркалює факт відновлення симетрії функції розподілу. Тут необхідно відмітити, що у діапазоні малих значень $\tau_{x,e}$ повне відновлення симетрії не спостерігається. Даний результат також підтвердили результати комп'ютерного експерименту. У рамках чисельного аналізу системи (2) – (5) факт реалізації ШПП не був підтверджений навіть при $\tau_{x,e} \gg 1$. Таким чином реалізація ШПП за рахунок варіації $\tau_{x,e}$ у системі із непарною мультиплікативною функцією неможлива. З рис. 6 бачимо, що збільшення часу автокореляції кольорових шумів також сприяє відновленню симетрії функції розподілу.

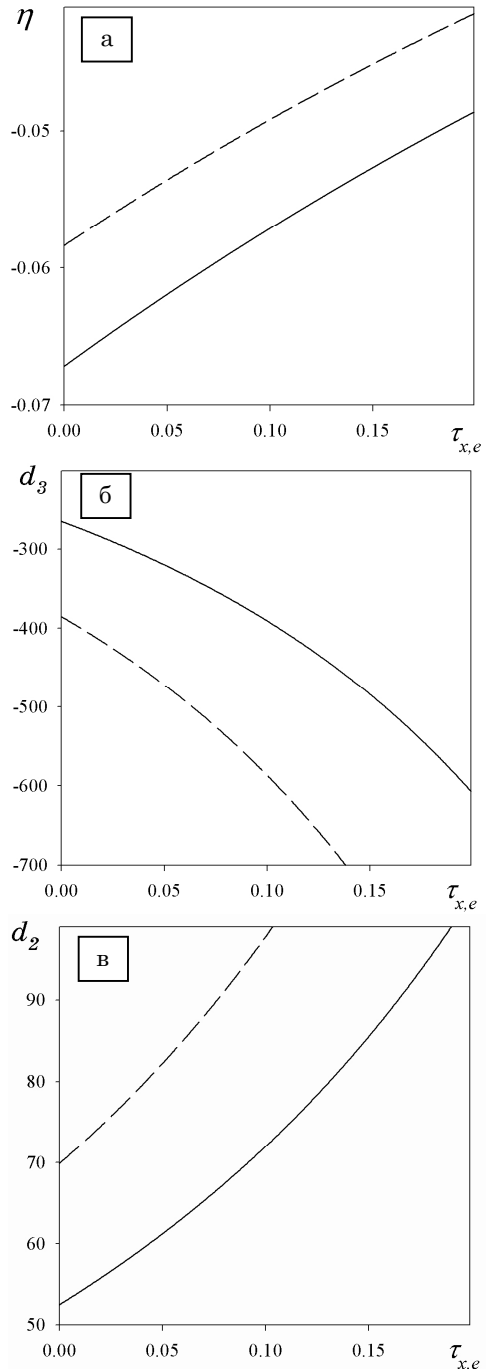


Рис. 6 – Залежність параметра порядку η (а), дисперсії d_2 (б) та асиметрії d_3 (в) від часу крос-кореляції $\tau_{x,e}$ при $\theta = 1.2$, $\kappa = 1$, $\sigma_x = \sigma_e = 0.2$. Значення параметрів: $\tau_x = \tau_e = 0.01$ (штрихована крива), $\tau_{x,e} = 0.1$ (суцільна крива)

ВИСНОВКИ

У представленій роботі у рамках теоретичного аналізу та комп'ютерного експерименту досліджена поведінка синергетичної системи Лоренца, яка була узагальнена за рахунок введення кольорових адитивних шумів для кожної моди. Показано, що час крос-кореляції шумів відіграє нетривіальну роль, викликаючи індукований шумом перехід системи до упорядкованої фази у випадку парної мультиплікативної функції. Встановлено, що адитивний шум у сис-

темі грає роль організуючого фактора і його присутність є необхідною умовою реалізації зазначеного переходу. При цьому збільшення часу автокореляції шумів, навпаки, перешкоджає реалізації переходу, зсуваючи точку фазового переходу у бік великих значень керуючого параметра.

У роботі показано, що у випадку непарної мультиплікативної функції час авто- та крос-кореляції відіграє дезорганізуючу роль, сприяючи відновленню симетрії стаціонарної функції розподілу. Встановлено, що повне відновлення симетрії за рахунок переходу до низькочастотних флуктуацій не відбувається, і, відповідно, варіація спектральних характеристик шумів у цій системі не може стати причиною переходу типу симетрія/асиметрія.

ДОДАТОК А

За визначенням, функція розподілу густини ймовірності може бути отримана шляхом усереднення функції густини розподілу мікроскопічних станів $\rho(x, t)$ у фазовому просторі:

$$P(x, t) = \langle \rho(x, t) \rangle, \tag{A.1}$$

яка задовольняє рівнянню неперервності

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (\dot{x} \rho(x, t)). \tag{A.2}$$

Підставляючи (4) у (A.2), маємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -\left(\hat{L} - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\mu} g_{\mu} \zeta_{\mu} \right) \rho(x, t), \tag{A.3}$$

де

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x} f. \tag{A.4}$$

Для подальшого аналізу перейдемо до представлення взаємодії:

$$\wp(x, t) = e^{\hat{L}t} \rho(x, t). \tag{A.5}$$

Виконуючи елементарні перетворення, маємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \wp = -e^{\hat{L}t} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\mu} g_{\mu} \zeta_{\mu} e^{-\hat{L}t} \rho = \sum_{\mu} \hat{R}_{\mu}(x, t) \wp, \tag{A.6}$$

де введено оператор

$$\hat{R}_{\mu}(x, t) \equiv -\zeta_{\mu} \left(e^{\hat{L}t} \frac{\partial}{\partial x} g_{\mu} e^{-\hat{L}t} \right).$$

Для розв'язку даного рівняння, шляхом масштабування змінних у (A.6), виділимо малий параметр

ϵ_{μ} який визначається ієрархією характерних часових масштабів еволюції стохастичних та детерміністичних складових системи. Загальновідомий метод розкладання за кумулянтами [25] дозволяє подати праву частину у вигляді ряду за степенями $\epsilon_{\mu} \ll 1$. Нехтуючи доданками порядку $O(\epsilon_{\mu}^3)$ отримаємо наступне кінетичне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \wp \rangle = \sum_{\mu, \nu} \int_0^t \langle \hat{R}_{\mu}(x, t) \hat{R}_{\nu}(x, t') \rangle \langle \wp \rangle dt' \tag{A.7}$$

За умови $t \gg \tau_{\mu, \nu}$ можна покласти $\langle \wp(x, t') \rangle = \langle \wp(x, t) \rangle$ і верхню границю інтегрування спрямувати у нескінченність. У результаті рівняння (A.7) перепишеться наступним чином

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \wp \rangle = \sum_{\mu, \nu} \int_0^{\infty} \langle \hat{R}_{\mu}(x, t) \hat{R}_{\nu}(x, t') \rangle dt' \langle \wp \rangle. \tag{A.8}$$

Переходячи від (A.8) до вихідного представлення для $P(x, t)$, маємо

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \left(\hat{L} + \sum_{\mu, \nu} \hat{L}_{\mu}^{(0)} \int_0^{\infty} C_{\mu\nu}(t, t-\tau) e^{\hat{L}\tau} \hat{L}_{\nu}^{(0)} e^{-\hat{L}\tau} d\tau \right) P(x, t)$$

де

$$C_{\mu\nu}(t, t-\tau) = \langle \zeta_{\mu}(t) \zeta_{\nu}(t-\tau) \rangle, \quad \hat{L}_{\mu}^{(0)} \equiv \frac{\partial}{\partial x} g_{\mu}(x).$$

Розвиваючи експоненти у ряд по τ , перепишемо останнє рівняння у такий спосіб:

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \left(-\frac{\partial}{\partial x} f + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu, \nu} \hat{L}_{\mu}^{(0)} M_{\mu\nu}^{(n)} \hat{L}_{\nu}^{(n)} \right) P, \tag{A.9}$$

де введено моменти кореляційної функції

$$M_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \tau^n C_{\mu\nu}(t, t-\tau) d\tau \tag{A.10}$$

та оператор $\hat{L}_{\mu}^{(n)}$, який визначається комутатором

$$\hat{L}_{\mu}^{(n)} = \left[\hat{L}_{\mu}^{(n-1)}, \hat{L} \right]. \tag{A.11}$$

У першому наближенні (для $n = 1$) маємо

$$\hat{L}_{\mu}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} g_{\mu} \frac{\partial}{\partial x} f - \frac{\partial}{\partial x} f \frac{\partial}{\partial x} g_{\mu} \tag{A.12}$$

Підставляючи (A.11), (A.12) у (A.9), отримуємо рівняння (7).

Influence of Spectral Characteristics of Correlated Noises on the Behavior of Stochastic System

I.A. Knyaz'

Sumy State University, 2, Rimsky-Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine

In the paper the influence of cross-correlated spectral characteristics of correlated noise sources on the behavior of synergetic system is considered. It is shown that the increase in the cross-correlation time of additive and multiplicative noises below the bifurcation point leads to the noise-induced transition to the ordered state. In the case of odd multiplicative function the transition to the low-frequency noise is the reason of restoring the symmetry of the distribution function. All theoretical results are confirmed by the numerical experiment.

Keywords: Noise-induced transition, Colored noises, Additive noise, Cross-correlation time.

Влияние спектральных характеристик коррелирующих шумов на поведение стохастической системы

И.А. КНЯЗЬ

Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина

В работе рассмотрено влияние кросс-корреляционных спектральных характеристик коррелирующих флуктуационных источников шума на поведение синергетической системы. Показано, что увеличение времени кросс-корреляции аддитивного и мультипликативного шума ниже точки бифуркации приводит к реализации индуцированного шумом перехода к упорядоченной фазе. В случае нечетной мультипликативной функции переход к низкочастотному шуму является причиной восстановления симметрии функции распределения. Все теоретические результаты подтверждаются численным экспериментом.

Ключевые слова: индуцированный шумом переход, цветные флуктуации, аддитивный шум, время кросс-корреляции.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы* (Москва: Мир: 1987).
2. P. Hanggi, P. Jung, *Adv. Chem. Phys.* **89**, 239 (1995).
3. S. Mangioni, R. Deza, H.S. Wio, R. Toral, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2389 (1997).
4. S.E. Mangioni, R.R. Deza, R. Toral, H.S. Wio, *Phys. Rev. E* **61**, 223 (2000).
5. Д.О. Харченко, И.А. Князь, *Металлофизика и новейшие технологии* **24** No3, 389 (2002).
6. C.J. Tessone, H.S. Wio, P. Hanggi, *Phys. Rev. E* **62**, 4623 (2000).
7. P.S. Landa, A.A. Zaikin, V.G. Ushakov, J. Kurths, *Phys. Rev. E* **61**, 4809 (2000).
8. A.A. Zaikin, J. Kurths, *Chaos* **11**, 570 (2001).
9. R.D. Astumian, P. Hanggi, *Phys. Today* **55**, 33 (2002).
10. K.P. Singh, G. Ropars, M. Brunel, A. Le Floch, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 073901 (2003).
11. P. Hanggi, F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 387 (2009).
12. S.I. Denisov, A.N. Vitrenko, W. Horsthemke, *Phys. Rev. E* **68**, 046132 (2003).
13. S. Kai, S. Wakabayashi, M. Imasaki, *Phys. Rev. A* **33**, 2612 (1986).
14. S. Zhu, A.W. Yu, R. Roy, *Phys. Rev. A* **34**, 4333 (1986).
15. Д.О. Харченко, И.О. Князь, *Журн. фіз. досл.* **8** No4, 299 (2004) (D.O. Kharchenko, I.A. Knyaz, *Journal of Physical Studies* **8**, 299 (2004)).
16. I.A. Knyaz', *Eur. Phys. J. B* **83**, 235 (2011).
17. H. Risken, *The Fokker-Plank equation* (Berlin: Springer-Verlag: 1989).
18. L. Ramirez-Piscina, J.M. Sancho, F.J. de la Rubia, K. Lindenberg, G.P. Tsironis, *Phys. Rev. A* **40**, 2120 (1989).
19. Г. Хакен, *Синергетика: иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах* (Москва: Мир: 1985).
20. Г. Николис, И. Пригожин, *Самоорганизация в неравновесных системах* (Москва: Мир: 1979).
21. А.И. Олемской, И.А. Скляр, *УФН* **162** No6, 29 (1992).
22. A.I. Olemskoi, *Theory of structure transformations in non-equilibrium condensed matter* (New York: Nova Science Publishers Inc.: 1999).
23. А.И. Олемской, А.А. Кацнельсон, *Синергетика конденсированной среды*. (Москва: Едиториал: 2003).
24. А.И. Олемской, А.В. Хоменко, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **110**, 2144 (1996) [*JETP* **83**, 1180 (1996)].
25. N.G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Amsterdam: North-Holland: 1992).
26. V.E. Shapiro, *Phys. Rev. E* **48**, 109 (1993).
27. D.O. Kharchenko, I.A. Knyaz', *Eur. Phys. J. B* **32**, 375 (2003).