

PACS number: 05.45.Xt

САМОСИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

И.А. Князь, А.Н. Витренко

Сумский государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2, 40007, Сумы, Украина
E-mail: knigorua@mail.ru

На примере двух автоколебательных систем Ван дер Поля обсуждаются вопросы самосинхронизации в системе слабо-нелинейных осцилляторов с обратной связью. Показано, что синхронизация возможна лишь в узком интервале значений параметра связи; вне этого интервала динамика систем остается автономной. Показано, что разрушение синхронизации связано с изменением топологии аттракторов подсистем, которые становятся фазово-некогерентными.

Ключевые слова: ФАЗОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ, СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ, ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ, САМОСИНХРОНИЗАЦИЯ, ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА.

(Получено 23.11.2010, в отредактированной форме – 14.12.2010)

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление синхронизации в колебательных системах разной природы активно изучается в последнее время [1-2]. Эффект синхронизации рассматривается в контексте биологических и химических систем [3, 4], электрических цепей [5], радиофизики и защиты информации [6] и т.п. Для динамических систем под синхронизацией понимается совпадение характерных частот взаимодействующих подсистем. Более сильным критерием синхронизации является установление стационарной разницы между текущими фазами колебаний осцилляторов. При этом из захвата фаз (этот феномен носит название фазовой синхронизации (ФС) [7]) автоматически вытекает захват частот; обратное утверждение при этом не верно.

Возникновение определенного баланса между фазами является следствием установления энергетического баланса, который возникает благодаря взаимодействию осциллирующих подсистем. Отметим, что подавляющее большинство работ, посвященных задачам синхронизации, основано на двух принципиально различных типах связи (в зависимости от выбора последней реализуется “внешняя” или “внутренняя” синхронизация). В первом случае свободная ведущая система, играющая роль внешней силы, управляет ведомой системой; в результате возникает “эффект” захвата подсистемой частоты внешней силы [9-11]. Второй случай реализуется в сетях осцилляторов, при наличии “диффузионной” связи между элементами системы [12, 13]. В работе [14] была предложена принципиально иная схема связи, предполагающая наличие специального контроллера (сглаживающий фильтр), на вход которого подаются фазовые координаты осцилляторов; выходной сигнал, умноженный на коэффициент обратной связи (КОС), вводится во взаимодействующие подсистемы, меняя их временные масштабы. Такой тип связи является более естественным,

широко используется в технических устройствах (телекоммуникация, радиолокация и т.п.) и может быть легко реализован во многих реальных системах (нейронные сети, экологические системы, электрические цепи и т.п.) [15-18].

Теоретический анализ систем с обратной связью, предложенный в работе [14], ограничен классом простейших моделей периодических осцилляторов, типа системы Пуанкаре. Класс более сложных моделей проанализирован лишь в рамках численного эксперимента, причем основное внимание уделяется локализации нижней границы интервала значений коэффициента обратной связи, превышение которой приводит к самосинхронизации подсистем. В данной работе показано, что усиление обратной связи вместо ожидаемого эффекта полной синхронизации (как предполагается в [14]) может привести к ее разрушению, что является новым результатом. Кроме того, в работе предлагается теоретическая схема анализа систем с обратной связью, которая, в рамках предложенных приближений, подходит для более широкого класса слабонелинейных осцилляторов (с простой фазово-когерентной топологией аттрактора). Работоспособность предложенного подхода подтверждается численным экспериментом.

2. МОДЕЛЬ

Модель динамической системы с обратной связью была построена следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1,2}}{dt} &= y_{1,2}, \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2}(t)x_{1,2} + \mu_{1,2}(1 - x_{1,2}^2)y_{1,2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $(x_{1,2}, y_{1,2})$ – состояние первого и второго осцилляторов соответственно, $\omega_{1,2}(t)$ – частоты, $\mu_{1,2}$ – константы. В случае $\omega_{1,2}(t) = \text{const}$ система (1) представляет собой популярную модель теории колебаний и нелинейной динамики – модель Ван дер Поля [19-21]. Управляющее влияние $\eta(t)$, умноженное на КОС κ , вводится в каждую из подсистем следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \omega_{(0)1} + \omega_{(0)1}\kappa\eta(t), \\ \omega_2(t) &= \omega_{(0)2} - \omega_{(0)2}\kappa\eta(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_{(0)1,2}$ – собственная частота колебаний осцилляторов 1 и 2 соответственно. Эволюция $\eta(t)$ описывается уравнением

$$\frac{d\eta}{dt} = -a\eta + x_1y_2, \quad (3)$$

где $a > 0$ – параметр контроллера. Схема работы фильтра выглядит следующим образом: два сигнала x_1 и y_2 формируют периодический сигнал, спектр которого представляется низкочастотной, которая определяется разницей $\Omega_1 - \Omega_2$, и высокочастотной, которая определяется

суммой $\Omega_1 + \Omega_2$, составляющими, где Ω_1, Ω_2 – средние частоты колебаний (характерные временные масштабы) первого и второго осцилляторов соответственно. Совокупный сигнал пропускается через фильтр (3), который, при условии $\omega_{(0)1} + \omega_{(0)2} > a$, подавляет высокочастотную составляющую. После фильтрации сигнал $\eta(t)$ добавляется к каждой из подсистем, меняя их характерные временные масштабы. В результате устанавливается определенный баланс между временными масштабами, $\Omega_1 = \Omega_2$.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Для диагностики и количественного анализа синхронизации введем соответствующие характеристики, а именно фазу и амплитуду сигнала. Следует отметить, что не существует универсального способа введения фазы сигнала, который бы давал корректные результаты для любых динамических систем. Для систем с простой топологией аттрактора (проекция фазовой траектории на определенную плоскость состояний (x, y) все время вращается вокруг начала координат (не пересекая и не огибая его) мгновенная фаза $\varphi(t)$ может быть введена как угол в полярной системе координат на плоскости (x, y) [10]:

$$\varphi(t) = \arctg \frac{y(t)}{x(t)}. \quad (4)$$

При компьютерном моделировании более удобным способом определения фазы является использование поверхности сечения Пуанкаре, при этом фаза определяется как

$$\varphi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (5)$$

где t_n – момент времени, которое отвечает n -му пересечению поверхности Пуанкаре фазовой траекторией. Для систем с простой топологией аттрактора формулы (4) и (5) дают практически одинаковые результаты: динамика мгновенной фазы для обоих методов будет незначительно отличаться на интервалах времени, меньших характерного периода возвращения фазовой траектории к поверхности сечения Пуанкаре [1]. Соответственно амплитуда сигнала определяется как

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (6)$$

а средняя частота сигнала Ω определяется как средняя скорость изменения фазы

$$\Omega = \left\langle \frac{d}{dt} \varphi(t) \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{T}. \quad (7)$$

Режим фазовой синхронизации означает, что фазы $\varphi_{1,2}(t)$ сигналов взаимодействующих систем становятся захваченными, то есть

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \text{const} \cdot \quad (8)$$

Для развития приближенной теории фазовой синхронизации в системе (1)-(3), перейдем к полярным координатам: $x_{1,2} = A_{1,2} \cos \varphi_{1,2}$, $y_{1,2} = A_{1,2} \sin \varphi_{1,2}$. Перепишывая систему (1)-(3) в переменных (4), (6), имеем

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{1,2} \frac{dA_{1,2}}{dt} - A_{1,2} \sin \varphi_{1,2} \frac{d\varphi_{1,2}}{dt} &= A_{1,2} \sin \varphi_{1,2}, \\ \sin \varphi_{1,2} \frac{dA_{1,2}}{dt} + A_{1,2} \cos \varphi_{1,2} \frac{d\varphi_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2} A_{1,2} \cos \varphi_{1,2} + \mu_{1,2} A_{1,2} \sin \varphi_{1,2} - \\ &\quad - \mu_{1,2} A_{1,2}^3 \cos^2 \varphi_{1,2} \sin \varphi_{1,2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -a\eta + A_1 A_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2.$$

Деля первое и второе уравнение системы (9) на $\sin \varphi_{1,2}$ и $\cos \varphi_{1,2}$ соответственно, и отнимая от первого второе, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos \varphi_{1,2}}{\sin \varphi_{1,2}} - \frac{\sin \varphi_{1,2}}{\cos \varphi_{1,2}} \right) \frac{dA_{1,2}}{dt} - 2A_{1,2} \frac{d\varphi_{1,2}}{dt} &= \\ = A_{1,2} + \omega_{1,2} A_{1,2} - \mu_{1,2} A_{1,2} \frac{\sin \varphi_{1,2}}{\cos \varphi_{1,2}} + \mu_{1,2} A_{1,2}^3 \cos \varphi_{1,2} \sin \varphi_{1,2}, \end{aligned}$$

Используя соотношение (2) и учитывая, что при малых $\mu_{1,2}$ амплитуда $A_{1,2}$ изменяется очень медленно ($dA_{1,2}/dt \approx 0$), получаем эволюционное уравнение для фазы первого и второго осцилляторов. При этом эволюция разности фаз будет описываться уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \frac{1}{2} \left[(\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}) - \kappa \eta(t) (\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1}) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_1 \left(\frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} - A_1^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \right) - \mu_2 \left(\frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} - A_2^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Введя “медленную” фазу $\theta_{1,2}$ (согласно соотношению $\varphi_{1,2} = \omega_{(0)1,2} t + \theta_{1,2}$), раскладывая произведение $\cos \varphi_1 \sin \varphi_2$ третьего уравнения системы (9) на быстро- и медленно-осциллирующие составляющие, усредняем уравнение для $\eta(t)$ и уравнение (13). Учитывая, что фильтр (3) подавляет “высокие” частоты и $\langle A_1 \rangle \approx \langle A_2 \rangle \equiv \langle A \rangle \approx \text{const}$ окончательно имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\theta_1 - \theta_2) &= \frac{1}{2}(\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}) - \frac{1}{2} \kappa \eta(t) (\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1}), \\ \frac{d\eta}{dt} &= -a\eta - \frac{\langle A \rangle^2}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Представляя систему (14) в виде уравнения второго порядка, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\theta_1 - \theta_2) + a \frac{d}{dt}(\theta_1 - \theta_2) - \frac{a}{2}(\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}) - \\ - \frac{\kappa \langle A \rangle^2}{4}(\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1}) \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда вытекает, что условием фазового захвата является выполнение равенства

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{2a(\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1})}{\kappa \langle A \rangle^2 (\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1})}, \quad (16)$$

что возможно при условии

$$\kappa \geq \frac{2a |\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}|}{\langle A \rangle^2 (\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1})}. \quad (17)$$

Таким образом, пороговое значение КОС κ_p , превышение которого приводит к режиму фазовой синхронизации: $\kappa_p = 2a|\omega_{(0)1} - \omega_{(0)2}|/\langle A \rangle^2(\omega_{(0)1} + \omega_{(0)2})$

На рис. 1 представленная область синхронизации подсистем в плоскости параметров КОС и разности собственных частот подсистем 1 и 2. При малых $\mu_{1,2}$ фазовая траектория осциллятора Ван дер Поля фактически представляет собой окружность, радиус которой легко может быть оценен численно. При выбранных параметрах средняя амплитуда колебаний составляет $\langle A \rangle \approx 2$. Сплошная кривая отвечает границе установления режима синхронизации в соответствии с проведенным теоретическим анализом. Наличие синхронного режима определялось выполнением условия захвата фаз (17). Из рисунка видно, что в случае малой расстройки частот, синхронный режим реализуется уже при достаточно малых значениях КОС. При линейном увеличении расстройки фазовая синхронизация возможна при условии логарифмического увеличения КОС.

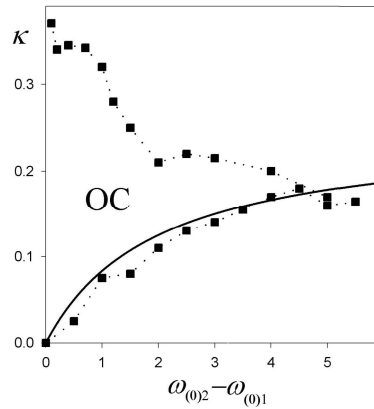


Рис. 1 – Зависимость критического значения КОС κ от разницы собственных частот взаимодействующих подсистем $\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}$ при $a = 0.5$. Область фазовой синхронизации, рассчитанная в рамках теоретического анализа, лежит выше сплошной кривой. Область синхронизации (ОС), рассчитанная на основе численного эксперимента лежит между кривыми, отмеченными маркерами

4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Компьютерное моделирование процессов синхронизации в представленной системе проводилось на основе непосредственного численного решения уравнений (1)-(3) методом Эйлера-Кромера с шагом интегрирования $h = 0,001$. Начальные условия выбирались случайным образом, переходный процесс длиной $T = 200$ был опущен. Управляющее влияние включалось в момент $t = 200$ после выхода траектории на предельный цикл.

В рамках численного анализа были рассчитаны критические значения КОС, при которых возможна самосинхронизация при различных комбинациях собственных частот подсистем. Обобщенные результаты проведенных экспериментов мы наложили на результаты теоретических расчетов (рис. 1). Как видно из рисунка, результаты расчета нижней границы интервала критических значений КОС фактически совпали, что подтверждает корректность использованных приближений и предложенной схемы в целом. Как показал компьютерный анализ, дальнейшее увеличение КОС приводит к сокращению времени переходного процесса при переходе к синхронному поведению после включения управляющего воздействия. При больших значениях КОС в системе прослеживается неожиданный эффект разрушения синхронной динамики и переход к хаосу. Для установления причин разрушения синхронизации мы детально исследовали динамику обоих осцилляторов при различных КОС. На рис. 2 представлены фазовые портреты взаимодействующих подсистем, эволюция фаз и динамика их разности при различных КОС. Из-за отсутствия взаимодействия между осцилляторами (рис. 2а1-2а3) единственным аттрактором на фазовой плоскости является предельный цикл. При включении управляющего воздействия фазовые траектории “размываются” в пространстве: аттрактор каждой из взаимодействующих подсистем становится хаотическим (переход к хаотической динамике определялся по показателям Ляпунова). При увеличении КОС до значения $0,0075$ в системе происходит фазовая синхронизация, что отражается выходом кривой разности фаз на стационарный уровень (рис. 2в3). Полученное критическое значение КОС хорошо согласуется с результатами теоретического анализа: согласно выражению (17) пороговое значение КОС при данных параметрах подсистем составляет $\kappa_p \approx 0,083$. В диапазоне $\kappa \in [0,075; 0,3]$ колебания подсистем остаются синхронизированными. При увеличении κ ($\kappa > 0,3$) вместо ожидаемого режима полной синхронизации прослеживается обратный эффект: синхронизация разрушается (рис. 2г2-2г3), аттракторы подсистем (как это показано на рис. 2г1) становятся фазово-некогерентными (топология усложняется, фазовая траектория пересекает ось абсцисс по левую сторону от начала координат). Таким образом, в данном случае разрушение режима фазовой синхронизации эквивалентно разрушению фазовой когерентности аттрактора. Поскольку приближения теоретического анализа, приведенного выше, касаются лишь случая наличия фазово-когерентного аттрактора, условие (17) не учитывает изменение топологии аттрактора и, соответственно, наличие верхней критической точки в домене значений КОС, при превышении которой синхронизация разрушается.

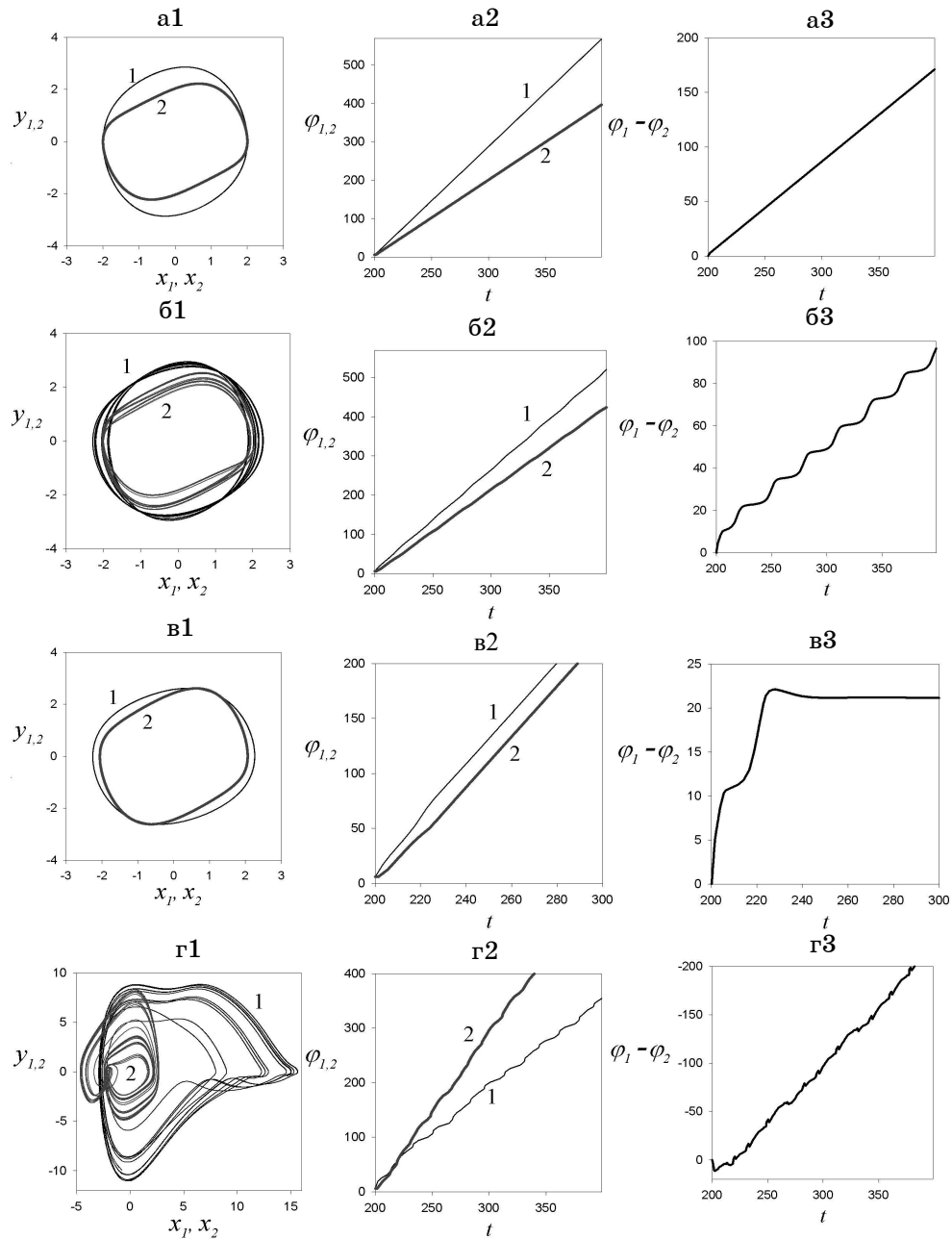


Рис. 2 – Фазовые портреты осцилляторов (рис. а1-г1), временная эволюция фаз (рис. а2-г2) и динамика их разности (а3-г3) на интервале $t \in [200, 400]$ при различных значениях КОС. Рисунки а1-а3 отвечают случаю $\kappa = 0$ (осцилляторы без взаимодействия), б1-б3 – $\kappa = 0.06$, в1-в3 – $\kappa = 0.075$, г1-г3 – $\kappa = 0.32$. Значения остальных параметров: $\omega_{(0)1} = 2$, $\omega_{(0)2} = 1$, $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.5$, $a = 0.5$. Кривые, отвечающие первому и второму осцилляторам, обозначены цифрами 1 и 2 соответственно

5. ВИВОДИ

В представленній роботі в рамках теоретичного аналізу і комп'ютерного експерименту досліджені особливості реалізації режиму самосинхронізації в системі ідентичних нелінійних осциляторів з обратною зв'язкою. Показано, що при збільшенні коефіцієнта обратної зв'язки в узькому домені значень даного параметра має місце реверсивний перехід, аналогічний реверсивним фазовим переходам в фізических системах [22]: поступенне збільшення параметра зв'язки приводить спочатку до виникнення фазової синхронізації, а потім до її руйнування. Процес руйнування синхронізації зв'язаний з зміною топології аттракторів підсистем, які стають фазово-некогерентними.

SELF-SYNCHRONIZATION IN A SYSTEM OF NONLINEAR VAN DER POL OSCILLATORS

I.A. Knyaz', A.N. Vitrenko

Sumy State University,
2, Rimsky-Korsakov Str., 40007, Sumy, Ukraine
E-mail: knigorua@mail.ru

The questions of self-synchronization in a system of weakly nonlinear feedback oscillators by the example of two self-oscillating van der Pol systems are discussed. It is shown that synchronization occurs in a narrow range of values of the coupling parameter; outside of this range the dynamics of the system is autonomous. It is shown that the breaking of synchronization is connected with the change in the topology of the attractors, which are phase incoherent.

Keywords: PHASE SYNCHRONIZATION, COUPLED OSCILLATORS, FEEDBACK, SELF-SYNCHRONIZATION, CHAOTIC DYNAMICS.

САМОСИНХРОНИЗАЦІЯ У СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

I.O. Князь, А.М. Вітренко

Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, 40007, Суми, Україна
E-mail: knigorua@mail.ru

На прикладі двох автоколивальних систем Ван дер Поля обговорюються питання самосинхронізації у системі слабо-нелінійних осциляторів із зворотним зв'язком. Показано, що синхронізація можлива лише у вузькому інтервалі значень параметра зв'язки; поза цим інтервалом динаміка систем залишається автономною. Показано, що руйнування синхронізації пов'язане із зміною топології аттракторів підсистем, що стають фазово-некогерентними.

Ключові слова: ФАЗОВА СИНХРОНИЗАЦІЯ, ЗВ'ЯЗАНІ ОСЦИЛЯТОРИ, ЗВОРОТНИЙ ЗВ'ЯЗОК, САМОСИНХРОНИЗАЦІЯ, ХАОТИЧНА ДИНАМІКА.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization – A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge: Cambridge University Press: 2001).

2. V.S. Anshchenko, V. Astakhov, A. Neiman, T. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments* (Heidelberg: Springer-Verlag: 2001).
3. I. Schreiber, M. Marek, *Physica D* **5**, 258 (1982).
4. S.K. Han, C. Kurrer, Y. Kuramoto, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3190 (1995).
5. J.F. Heagy, T.L. Carroll, L.M. Pecora, *Phys. Rev. E* **50**, 1874 (1994).
6. А.С. Дмитриев, А.И. Панас, *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи* (М.: Физматлит: 2002).
7. M.G. Roseblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1804 (1996).
8. В.С. Афраймович, Н.Н. Веричев, М.И. Рабинович, *Известия ВУЗов: Радиофизика* **29**, 1050 (1986).
9. L.M. Pecora, T.L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821 (1990).
10. M.G. Roseblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4193 (1997).
11. L. Kosarev, U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1816 (1996).
12. В.М. Малафеев, М.С. Полякова, Ю.М. Романовский, *Известия ВУЗов: Радиофизика* **13**, 936 (1970).
13. Д.К. Мынбаев, М.И. Шилленков, *Радиотехника и электроника* №2, 361 (1981).
14. V.N. Belykh, G.V. Osipov, N. Kucklander, B. Blasius, J. Kurths, *Physica D* **200**, 81 (2004).
15. M. Rabinovich, A. Volkovskii, P. Lecanda, R. Huerta, H.D.I. Abarbanel, G. Laurent, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 068102 (2001).
16. J.D. Murray, *Mathematical Biology* (Berlin: Springer: 1989).
17. Y. Braiman, T.A.B. Kennedy, K. Wiesenfeld, A. Khibnik, *Phys. Rev. A* **52**, 1500 (1995).
18. W.C. Lindsey, *Synchronization Systems in Communication and Control* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ: 1972).
19. В. van der Pol, *Phil. Mag.* **3**, 65 (1927).
20. А.А. Андронов, А.А. Витт, Ю.Э. Хайкин, *Теория колебаний* (М.: Гостехиздат: 1937).
21. N. Minorsky, *Nonlinear Oscillations* (Princeton, NJ: Van Nostrand: 1962).
22. Д.О. Харченко, И.О. Князь, *Журн. физ. докл.* **8**, 299 (2004) (D.O. Kharchenko, I.A. Knyaz, *J. Phys. Studies* **8**, 299 (2004)).