

## Однонаправленный транспорт ферромагнитных частиц в вязкой жидкости, порождаемый силой Магнуса

С.И. Денисов, Б.А. Педченко, М.А. Павлюк

Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина

(Получено 15.10.2016; опубликовано online 23.10.2016)

Изучается однонаправленное движение ферромагнитных частиц сферической формы, взвешенных в вязкой жидкости и находящихся под действием внешней периодической силы и неоднородно вращающегося магнитного поля. Для описания динамики таких частиц в случае, когда их поступательные и вращательные колебания характеризуются малыми числами Рейнольдса, предложена система уравнений, учитывающая влияние силы Магнуса. Проводится теоретический и численный анализ стационарного решения этой системы уравнений, вычисляется средняя скорость однонаправленного (дрейфового) движения частиц и изучается зависимость средней скорости от характеристик частиц, жидкости, силового и магнитного полей.

**Ключевые слова:** Ферромагнитная частица, Одномоментное состояние, Вязкая жидкость, Поступательное и вращательное движения, Эффект Магнуса, Скорость дрейфа.

DOI: 10.21272/jnep.8(4(2)).04087

PACS numbers: 75.75.Jn, 82.70. – y

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект Магнуса состоит в отклонении траектории вращающегося тела, движущегося в жидкости или газе, от траектории движения невращающегося тела. К настоящему времени этот эффект в его простейших проявлениях хорошо изучен и играет важную роль во многих областях науки и техники, в том числе в спорте [1], авиации [2], мореплавании [3] и планетообразовании [4]. Обычно он ассоциируется с силой Магнуса, которая порождается при движении вращающегося тела сквозь материальную среду. Отметим также, что сила Магнуса действует и на вихревые структуры, движущиеся в сверхпроводниках [5], сверхтекучих жидкостях [6] и магнетиках [7].

Теоретическое определение силы Магнуса представляет собой достаточно сложную проблему. Причина состоит в том, что ее решение требует решения системы связанных уравнений движения тела (например, уравнений Ньютона) и окружающей среды (например, уравнения Навье-Стокса). Однако если из этой системы уравнений при определенных условиях найдены сила Магнуса, а также силы вязкого трения и их моменты, тогда все особенности динамики тела в среде могут быть изучены с помощью лишь уравнений для поступательного и вращательного движений. В частности, согласно результатам классической работы [8], это возможно в случае сферических частиц, движение которых в вязкой жидкости характеризуется малыми числами Рейнольдса. Это же приближение применимо и для описания динамики ферромагнитных частиц, взвешенных в суспензии. Так, например, в его рамках хорошо изучены особенности вращательного движения таких частиц во вращающемся магнитном поле (см., например, статьи [9,10] и ссылки в них). Что же касается взаимного влияния вращательного и поступательного движений ферромагнитных частиц, которое осуществляется посредством силы Магнуса, то, насколько нам известно, этот вопрос ранее не рассматривался. В данной работе изучаются условия возникновения и характеристики однонаправленно-

го (дрейфового) движения одномоментных ферромагнитных частиц, порождаемого силой Магнуса.

### 2. БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Наш подход основан на простейшей системе уравнений, которая описывает трансляционное и вращательное движения ферромагнитных частиц в вязкой жидкости и учитывает действие на них силы Магнуса. Среднее расстояние между частицами предполагается настолько большим, что их магнитным диполь-дипольным и гидродинамическим взаимодействиями можно пренебречь. Поскольку в этом приближении частицы независимы, мы можем ограничиться рассмотрением динамики лишь одной из них. Будем полагать, что частица является сферической, имеет радиус  $a$  и находится в одномоментном состоянии, которое характеризуется намагниченностью  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t)$ , имеющей постоянную величину  $|\mathbf{M}| = M = \text{const}$ . Кроме того, трансляционные и вращательные движения частицы предполагаются происходящими настолько медленно, что индуцируемое ими течение жидкости является ламинарным, а инерционными эффектами, обусловленными массой  $m$  и моментом инерции  $J$  частицы, можем пренебречь. Это означает, что трансляционное и вращательное числа Рейнольдса, определяемые как  $Re_t = \rho a v_m / \eta$  и  $Re_r = \rho a^2 \omega_m / \eta$  ( $\rho$  и  $\eta$  – плотность и динамическая вязкость жидкости,  $v_m = \max|\mathbf{v}|$ ,  $\omega_m = \max|\boldsymbol{\omega}|$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  и  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$  – линейная и угловая скорости частицы) должны удовлетворять условиям  $Re_t \ll 1$  и  $Re_r \ll 1$ .

В рассматриваемой модели поступательное движение частицы происходит под действием трех сил: внешней движущей силы  $\mathbf{f}_d$  (external driving force), силы вязкого трения  $\mathbf{f}_f$  (viscous friction force) и подъемной силы Магнуса  $\mathbf{f}_l$  (Magnus lift force). Внешнюю силу выбираем в виде  $\mathbf{f}_d = f_0 \sin(\Omega t) \mathbf{e}_x$ , где  $f_0$  и  $\Omega$  – амплитуда и угловая частота силы,  $\mathbf{e}_x$  – единичный вектор вдоль оси  $x$ . Что касается остальных сил, то в случае малых чисел Рейнольдса сила трения опре-

деляется законом Стокса  $\mathbf{f}_f = -6\pi\eta a\mathbf{v}$ , а сила Магнуса дается выражением [8]  $\mathbf{f}_l = \pi r a^3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  (символ  $\times$  обозначает векторное произведение). Поскольку в этом приближении инерционные эффекты пренебрежимо малы, уравнение движения центра масс частицы  $m d\mathbf{v}/dt = \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_f + \mathbf{f}_l$  сводится к уравнению баланса сил  $\mathbf{f}_d + \mathbf{f}_f + \mathbf{f}_l = 0$ .

Вращательное движение ферромагнитных частиц в суспензии может быть индуцировано однородным магнитным полем  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$ . Это происходит потому, что в этом поле на магнитный момент частицы  $V_a \mathbf{M}$  ( $V_a = 4\pi a^3/3$  – объем частицы) действует момент сил  $\mathbf{t}_H = V_a \mathbf{M} \times \mathbf{H}$ . В свою очередь, если намагниченность в частице имеет предпочтительное направление (определяемое энергией анизотропии), тогда момент сил  $\mathbf{t}_H$  порождает некоторый механический момент сил  $\mathbf{t}$ . Именно последний действует на частицу и вызывает ее вращение. В случае большой энергии анизотропии, когда намагниченность можно считать замороженной в частицу, имеет место соотношение  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_H$ . Как и прежде, пренебрегая в уравнении вращательного движения  $J d\boldsymbol{\omega}/dt = \mathbf{t}_H + \mathbf{t}_f$  ( $\mathbf{t}_f = -8\pi\eta a^3 \boldsymbol{\omega}$  – момент сил вязкого трения) инерционным слагаемым, получаем уравнение баланса моментов сил  $\mathbf{t}_H + \mathbf{t}_f = 0$ . Таким образом, используя предыдущие результаты, систему уравнений баланса сил и моментов сил, описывающую поступательное и вращательное движения ферромагнитной частицы в вязкой жидкости, можно записать в виде

$$f_0 \sin(\Omega t) \mathbf{e}_x - 6\pi\eta a\mathbf{v} + \pi r a^3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{M} \times \mathbf{H} - 6\eta\boldsymbol{\omega} = 0. \quad (2.1b)$$

Важно подчеркнуть, что в уравнениях (2.1) векторы намагниченности  $\mathbf{M}$  и угловой скорости частицы  $\boldsymbol{\omega}$  не являются независимыми. Напротив, поскольку намагниченность постоянна по величине и заморожена в частицу, эти векторы связаны кинематическим соотношением  $d\mathbf{M}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ . С его помощью систему уравнений (2.1) можно привести к замкнутой системе уравнений для  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{M}$ . Для получения этой системы уравнений выразим угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}$  из уравнения (2.1b) и подставим ее в уравнение (2.1a) и кинематическое соотношение. Тогда, вводя безразмерное время  $\tau = \Omega t/2\pi$ , безразмерную скорость  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/v_0$ , где  $v_0 = f_0/6\pi\eta a$ , и безразмерную намагниченность  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$ , получаем

$$\mathbf{u} + \gamma \mathbf{u} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}) = \sin(2\pi\tau) \mathbf{e}_x, \quad (2.2a)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = -\alpha \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}). \quad (2.2b)$$

Здесь  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H_m$  – безразмерное магнитное поле,  $H_m = \max|\mathbf{H}|$ ,  $|\mathbf{m}| = 1$ , точка над  $\mathbf{m}$  обозначает производную по безразмерному времени  $\tau$  и

$$\gamma = \frac{\rho M H_m a^2}{36\eta^2}, \quad \alpha = \frac{\pi M H_m}{3\eta\Omega} \quad (2.3)$$

– безразмерные параметры.

Используя свойства смешанного и двойного векторного произведений векторов, уравнение (2.2a) может быть разрешено относительно безразмерной скорости частицы  $\mathbf{u}$ . Однако, поскольку выражения для  $\mathbf{f}_f$ ,  $\mathbf{f}_l$  и  $\mathbf{t}_f$  получены в линейном по числам Рей-

нольдса приближении [8], в выражении для  $\mathbf{u}$ , которое следует из решения уравнения (2.2a), достаточно сохранить лишь линейный по  $\text{Re}_\tau$  вклад. Для нахождения  $\mathbf{u}$  с линейной по  $\text{Re}_\tau$  точностью оценим сначала величину параметра  $\gamma$ . Полагая, что  $\omega_m \sim \Omega$  и используя определения  $\text{Re}_\tau$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$ , находим  $\gamma \sim (\alpha/12\pi)\text{Re}_\tau$ . Эта оценка показывает, что если параметр  $\alpha$  не слишком большой, тогда  $\gamma \ll 1$  и решение уравнения (2.2a) можно искать в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ , где  $|\mathbf{u}_0| \sim 1$  и  $|\mathbf{u}_1| \sim \text{Re}_\tau \ll 1$ . (Отметим, что даже если условие  $\gamma \ll 1$  не выполняется, решение уравнения (2.2a) все равно можно искать в предложенном виде. Причина состоит в том, что, согласно (2.2b), при  $\alpha \gg 1$  векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{h}$  почти параллельны. А это, в свою очередь, означает, что и при  $\alpha \gg 1$  второе слагаемое в левой части (2.2a) малó по сравнению с первым.) Простые вычисления дают  $\mathbf{u}_0 = \sin(2\pi\tau) \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{u}_1 = -\gamma \mathbf{u}_0 \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h})$  и, следовательно,

$$\mathbf{u} = [\mathbf{e}_x - \gamma \mathbf{e}_x \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h})] \sin(2\pi\tau). \quad (2.4)$$

Согласно этому результату, вращение ферромагнитной частицы в вязкой жидкости, которое описывается уравнением (2.2b) (напомним, что вектор  $\mathbf{m}$  заморожен в частицу), оказывает влияние на ее трансляционное движение. Для того чтобы оценить степень этого влияния при заданной зависимости  $\mathbf{h}$  от  $\tau$ , сначала следует решить уравнение (2.2b) относительно  $\mathbf{m}$ . Затем, подставив это решение в (2.4), необходимо проанализировать вклад слагаемого (пропорционального  $\gamma$ ), которое описывает действие силы Магнуса. Поскольку это слагаемое малó, изменение траектории движения частицы за счет ее вращения, происходящее на временных интервалах порядка 1 (в единицах размерного времени – на временных интервалах порядка периода внешней силы), также малó. Однако, если такие изменения являются систематическими, их кумулятивный эффект на больших временных интервалах может оказаться существенным. Используя уравнения (2.2b) и (2.4), мы далее показываем, что в случае, когда колебательное и вращательное движения частицы синхронизированы, кумулятивный эффект действия силы Магнуса может проявляться в дрейфовом движении частицы вдоль некоторого направления.

### 3. ДРЕЙФ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим магнитное поле постоянной величины ( $|\mathbf{H}| = H_m$ ), которое совершает неравномерное вращение в плоскости  $xu$  и обладает теми же периодическими свойствами, что и внешняя сила. В соответствии с этими условиями безразмерное магнитное поле  $\mathbf{h}$  имеет единичную длину ( $|\mathbf{h}| = 1$ ) и может быть представлено в виде

$$\mathbf{h} = \cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y, \quad (3.1)$$

где  $\psi = \psi(\tau + \phi/2\pi)$  – угол между вектором  $\mathbf{h}$  и осью  $x$ , а  $\phi$  – начальная фаза магнитного поля, играющая роль параметра синхронизации колебательного и вращательного движений частицы. Так как внешняя сила изменяется по гармоническому закону  $\sin(2\pi\tau)$ , предполагается, что  $\psi$  как функция  $\tau$  является периодической с периодом 1 и удовлетворяет условию

$\psi|_{1/2+\tau} = -\psi|_{\tau}$  (и, следовательно,  $\psi|_{1+\tau} = \psi|_{\tau}$ ). Чтобы вектор  $\mathbf{h}$  мог совершать многократные обороты в плоскости  $xu$  как по, так и против часовой стрелки, максимальное значение  $\psi_m = \max \psi$  угла  $\psi$  мы ограничивать не будем. Что же касается начальной фазы  $\phi$ , то, вследствие периодичности функции  $\psi$ , можно полагать, что  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

Структура магнитного поля (3.1) позволяет предположить, что стационарное решение уравнения (2.2b) лежит в плоскости  $xu$ . Поэтому нестационарное решение этого уравнения будем искать в виде

$$\mathbf{m} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad (3.2)$$

где  $\varphi = \varphi(\tau)$  – угол между вектором  $\mathbf{m}$  и осью  $x$ . Теперь, используя (3.1) и (3.2) и вводя угол отставания  $\chi = \psi - \varphi$ , находим  $\mathbf{m} \times \mathbf{h} = \sin \chi \mathbf{e}_z$  ( $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ ). Подставляя этот результат в уравнения (2.2b) и (2.4) и учитывая легко проверяемые соотношения  $\dot{\mathbf{m}} = -\dot{\varphi}(\sin \varphi \mathbf{e}_x - \cos \varphi \mathbf{e}_y)$  и  $\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}) = \sin \chi (\sin \varphi \mathbf{e}_x - \cos \varphi \mathbf{e}_y)$ , приходим к следующей системе уравнений:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{e}_x + \gamma \sin \chi \mathbf{e}_y] \sin(2\pi\tau), \quad (3.3a)$$

$$\dot{\chi} + \alpha \sin \chi = \dot{\psi}. \quad (3.3b)$$

Эти уравнения описывают поступательное и вращательное движения частицы в магнитном поле (3.1) при условии, что вектор  $\mathbf{m}$  лежит в плоскости  $xu$ . В дальнейшем при численном нахождении стационарного решения уравнения (3.3b) будем полагать, что выполняется начальное условие  $\psi|_{\tau=0} = 0$ .

Согласно уравнению (3.3a), поступательное движение частицы происходит в плоскости  $xu$ , а ее траектория описывается безразмерным радиус-вектором  $\mathbf{R}(\tau) = \int_0^{\tau} \mathbf{u}(\tau') d\tau'$  центра частицы, который можно представить в виде

$$\mathbf{R}(\tau) = \frac{1}{2\pi} [1 - \cos(2\pi\tau)] \mathbf{e}_x + \gamma \int_0^{\tau} \sin[\chi(\tau' + \phi/2\pi)] \sin(2\pi\tau') d\tau' \mathbf{e}_y. \quad (3.4)$$

Как видно, вдоль оси  $x$  частица совершает лишь колебательное движение в интервале  $(0, 1/\pi)$ , т.е.,  $R_x(\tau) \in (0, 1/\pi)$ . Что же касается  $y$ -компоненты вектора  $\mathbf{R}(\tau)$ , то структура второго слагаемого в правой части (3.4) такова, что можно ожидать дрейфового движения частицы вдоль (или против) оси  $y$ , при котором  $R_y(\tau) \rightarrow \infty$  (или  $R_y(\tau) \rightarrow -\infty$ ) если  $\tau \rightarrow \infty$ . Для нахождения  $R_y(\tau)$  необходимо решить уравнение (3.3b), известное как уравнение сверхзатухающего маятника (overdamped pendulum) с периодической правой частью [11]. Поскольку его точные решения известны лишь в нескольких частных случаях, анализ дрейфа частиц будем проводить численно.

### 3.1 Скорость дрейфа

Чтобы исключить зависимость скорости дрейфа частицы от начального значения  $\psi|_{\tau=0}$ , определим ее в стационарном состоянии. Для этого введем в рассмотрение безразмерное смещение частицы  $\mathbf{s}_n$ , которое происходит в течение действия  $(n+1)$ -го периода ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) внешней силы, как  $\mathbf{s}_n = \mathbf{R}(n+1) -$

$\mathbf{R}(n)$  [ $\mathbf{R}(0) = 0$ ]. Тогда искомого безразмерную скорость дрейфа можно определить как предел  $\mathbf{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{s}_n$  (в размерном виде скорость дрейфа равна  $\mathbf{v}_{dr} = v_0 \mathbf{s}$ ). Согласно (3.4), скорость дрейфа вдоль оси  $x$  равна  $s_x = 0$ , а вдоль оси  $y$  дается выражением

$$s_y = \gamma \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \sin[\chi(\tau' + \phi/2\pi)] \sin(2\pi\tau') d\tau'. \quad (3.5)$$

Полагая в (3.5), что  $\tau' = n + \xi$  с  $\xi \in (0, 1)$  и учитывая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(n + \xi + \phi/2\pi) = \chi_{st}(\xi + \phi/2\pi)$  – стационарное решение уравнения (3.3b) при  $\tau = n + \xi$  и  $n \rightarrow \infty$ , формулу (3.5) можем переписать в виде

$$s_y = \gamma \int_0^1 \sin[\chi_{st}(\xi + \phi/2\pi)] \sin(2\pi\xi) d\xi. \quad (3.6)$$

Наконец, принимая во внимание условие  $\chi_{st}(\xi + 1/2 + \phi/2\pi) = -\chi_{st}(\xi + \phi/2\pi)$  и условие  $\int_c^{c+1} g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$  ( $c$  – действительное число), которое выполняется для любой периодической функции  $g(x)$  периода 1, из формулы (3.6) после замены переменной  $\xi \rightarrow \xi - \phi/2\pi$  окончательно получаем [12]

$$s_y = 2\gamma \int_0^{1/2} \sin[\chi_{st}(\xi)] \sin(2\pi\xi - \phi) d\xi. \quad (3.7)$$

Следует особо подчеркнуть, что  $\chi_{st}(\xi + \phi/2\pi)$  в (3.6) и  $\chi_{st}(\xi)$  в (3.7) – это стационарные решения уравнения (3.3b) соответственно при  $\phi \neq 0$  и  $\phi = 0$ . Поскольку в этом уравнении параметр  $1/\alpha$  имеет смысл безразмерного времени установления стационарного режима вращения частицы (т.е.,  $1/\alpha$  – безразмерное время вращательной релаксации), его стационарное решение устанавливается при  $n \gg 1/\alpha$ . Отметим, что, согласно (3.7), величина скорости дрейфа и направление дрейфа явно зависят от начальной фазы  $\phi$  (в частности,  $s_y|_{\phi \pm \pi} = -s_y|_{\phi}$ ), а максимальная скорость дрейфа ограничена условием  $\max s_y < \gamma$ . Обратим также внимание на тот факт, что в данном теоретическом подходе не учитываются поступательное и вращательное броуновское движение частицы. Это оправданно, если ее размер порядка или превышает несколько сот нанометров. С другой стороны, поскольку магнитное состояние частицы предполагается однодоменным, ее размер не должен превышать некоторый критический [13]. Соответствующие оценки показывают [12] (см. также [14,15]), что оба условия могут выполняться одновременно. Кроме того, с увеличением амплитуды  $H_m$  внешнего магнитного поля критический размер частицы увеличивается и, следовательно, область применимости теории расширяется.

### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В рамках предложенного подхода нами проведен численный анализ поступательной и вращательной динамики ферромагнитной частицы в случае, когда угол поворота внешнего магнитного поля изменяется со временем по гармоническому закону

$$\psi = \psi_m \cos(2\pi t + \phi). \quad (4.1)$$

Чтобы убедиться, что в магнитном поле, определяемом выражениями (3.1) и (4.1), намагниченность частицы может быть представлена в виде (3.2), мы

решили уравнение (2.2b) для различных направлений начальной намагниченности  $\mathbf{m}|_{t=0}$ . В результате было установлено, что независимо от направления вектора  $\mathbf{m}|_{t=0}$  намагниченность  $\mathbf{m}$  по истечении некоторого времени ложится в плоскость  $xu$ , где ее отставание от магнитного поля  $\mathbf{h}$  описывается углом отставания  $\chi$ , который удовлетворяет уравнению (3.3b). Поэтому дальнейшее изучение свойств поступательного и вращательного движений частицы проведено с помощью уравнений (3.3). Представленные ниже численные результаты получены при  $\psi_m = 0.25 \text{ rad}$ , а число  $n$  периодов внешней силы, в течение которых устанавливается стационарная динамика частицы при  $\alpha > 0.1$ , выбрано равным 50.

На рис. 1 показана функция  $\chi_{st}(\xi)$ , рассчитанная для двух значений параметра  $\alpha$  при  $\phi = 0$ . Графики этой функции иллюстрируют тот факт, который следует из уравнения (3.3b), что увеличение параметра  $\alpha$  влечет за собой стремление угла отставания к функции  $-(2\pi/\alpha)\psi_m \sin(2\pi\xi)$ , являющейся асимптотическим решением этого уравнения при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

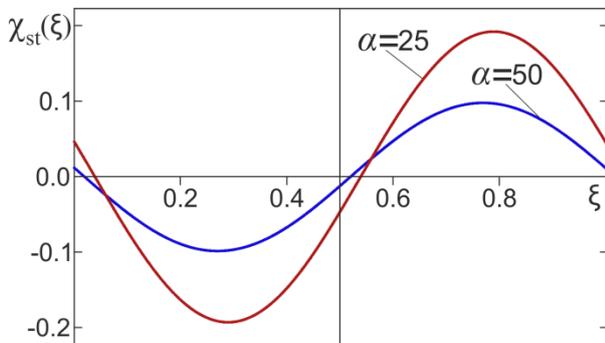


Рис. 1 – Временная зависимость угла отставания вектора намагниченности  $\mathbf{m}$  от вектора магнитного поля  $\mathbf{h}$  в стационарном состоянии для двух значений параметра  $\alpha$ .

Для нахождения стационарной траектории частицы введем ее радиус-вектор по формуле  $\mathbf{R}(\xi) = \mathbf{R}(50 + \xi) - \mathbf{R}(50)$ . Отсюда, используя (3.4), получаем

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{2\pi} [1 - \cos(2\pi\xi)] \mathbf{e}_x + \gamma \int_0^\xi \sin[\chi_{st}(\xi')] \sin(2\pi\xi' - \phi) d\xi' \mathbf{e}_y. \quad (4.2)$$

Отметим, что  $\mathbf{R}(\xi)$  является векторной периодической функцией  $\xi$  с периодом 1. В качестве иллюстрации на рис. 2 показаны траектории частицы в безразмерных переменных  $R_x$  и  $R_y$  для параметров  $\alpha = 50$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\phi = \pi/4$  (нижняя траектория) и  $\phi = 3\pi/4$  (верхняя траектория). Стрелки на траекториях указывают направление увеличения безразмерного времени  $\xi$  от нулевого значения в начале координат до  $\xi = 2$ . Угловые точки траекторий при  $R_x = 0$  отвечают моментам времени  $\xi = 1$  и  $2$ , а угловые точки траекторий при  $R_x = 1/\pi$  – моментам времени  $\xi = 1/2$  и  $3/2$ . Согласно формулам (3.7) и (4.2), скорость дрейфа частицы можно записать в виде  $s_y = R_y(1)$ , поэтому в данном случае  $s_y \approx -3.9 \cdot 10^{-2}$  при  $\phi = \pi/4$  и  $s_y \approx 2.9 \cdot 10^{-2}$  при  $\phi = 3\pi/4$ .

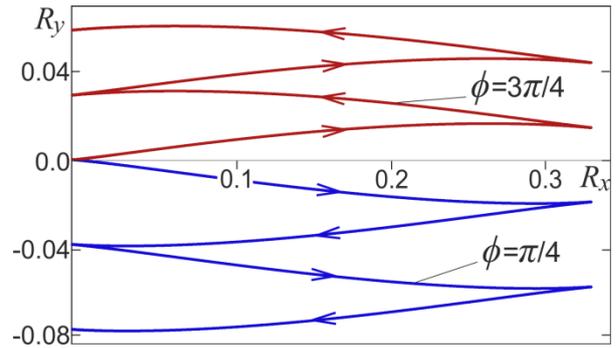


Рис. 2 – Иллюстративные траектории движения центра частицы в вязкой жидкости с учетом силы Магнуса.

Рисунки 3 и 4 иллюстрируют зависимость приведенной скорости дрейфа частицы  $s_y/\gamma$  от величины параметров  $\alpha$  ( $\alpha > 0.1$ ) и  $\phi$  (отметим, что, согласно (3.7),  $s_y/\gamma$  от  $\gamma$  не зависит). Важной особенностью скорости дрейфа является ее немонотонная зависимость от параметра  $\alpha$  (см. рис. 3). При этом  $s_y/\gamma$  стремится к нулю как  $1/\alpha$ , если  $\alpha \rightarrow \infty$ . Следовательно, если частицы в суспензии имеют разные времена вращательной релаксации (разные намагниченности), тогда их дрейф должен происходить с разными скоростями. Другая важная особенность скорости дрейфа  $s_y/\gamma$  состоит в том, что и ее знак (т.е. направление дрейфа) может зависеть от времени вращательной релаксации. Другими словами, если в суспензии содержатся две группы частиц, имеющих разную намагниченность, тогда при соответствующем выборе угла синхронизации  $\phi$  они могут дрейфовать в противоположных направлениях. Этот факт можно, вероятно, использовать для сепарации таких частиц в суспензиях. Отметим также, что при надлежащем выборе угла  $\phi$  частица, характеризующая конкретным значением параметра  $\alpha$ , может дрейфовать как вдоль, так и против оси  $y$  (см. рис. 4).

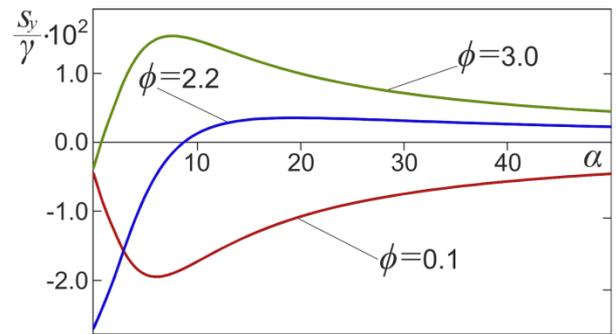


Рис. 3 – Зависимость приведенной скорости дрейфа частицы от параметра  $\alpha$  при различных значениях угла синхронизации  $\phi$ , выраженного в радианах.

В качестве примера оценим скорость дрейфа  $\text{SmCo}_5$  частиц в воде. Согласно [13], намагниченность таких частиц при комнатной температуре равна  $M = 1.4 \cdot 10^3 \text{ emu/cm}^3$ , а их критический радиус (частицы меньшего радиуса являются однодоменными) порядка  $6 \cdot 10^2 \text{ nm}$ . Поэтому, выбирая  $a = 5 \cdot 10^2 \text{ nm}$ ,  $H_m = 2 \cdot 10^6 \text{ Oe}$ ,  $\Omega = 10^6 \text{ rad/s}$  и учитывая, что для во-

ды  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$  и  $\eta = 8.9 \cdot 10^{-3} \text{ P}$ , из (2.3) находим  $\gamma \approx 0.25$  и  $\alpha \approx 33$ . Далее, полагая, что  $\phi = 3 \text{ rad}$  и используя вычисленные значения для  $\gamma$  и  $\alpha$ , получаем  $s_y \approx 1.7 \cdot 10^{-3}$ . Учитывая, наконец, что размерная скорость дрейфа частицы определяется как  $v_{\text{dr}} = v_0 s_y$ , оценим величину  $v_0$ . Для определенности будем полагать, что колебательное движение частицы вызывает градиентное магнитное поле  $\mathbf{H}_g = gx \sin(\Omega t) \mathbf{e}_x$  ( $g$  – градиент поля), в котором на частицу действует сила  $\mathbf{f}_d = V_a M g m_x \sin(\Omega t) \mathbf{e}_x$ , где  $m_x$  – проекция вектора  $\mathbf{m}$  на ось  $x$ . Принимая для оценки, что  $m_x \sim 1$ , отсюда получаем  $f_0 \approx V_a M g$  и, следовательно,  $v_0 \approx 2a^2 M g / 9\eta$ . Поэтому, если, например,  $g = 10^3 \text{ Oe/cm}$ , тогда  $v_0 \approx 8.7 \cdot 10^{-2} \text{ cm/s}$  и  $v_{\text{dr}} \approx 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$ . Аналогичные оценки показывают, что легко достижимы и большие скорости дрейфа.

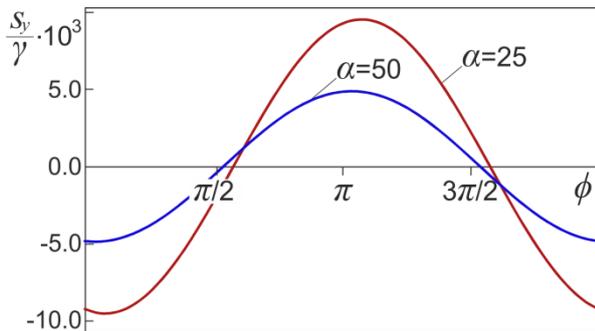


Рис. 4 – Приведенная скорость дрейфа частицы как функция угла синхронизации  $\phi$  при  $\alpha = 25$  и  $\alpha = 50$ .

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена простейшая система уравнений для описания поступательного и вращательного движений сферической ферромагнитной частицы в вязкой жидкости, учитывающая действие силы Магнуса. Предполагается, что состояние частицы является однодомным, соответствующие числа Рейнольдса малы, а колебательное и вращательное движения частицы порождаются соответственно внешней гармонической силой и неоднородно вращающимся магнитным полем. С помощью полученной системы уравнений теоретически предсказано и численно подтверждено существование дрейфа частицы в выделенном направлении, если изменения силы и поля определенным образом синхронизированы. Установлено, что путем изменения параметра синхронизации (его роль играет сдвиг фаз между силой и полем) направление дрейфа можно изменить на противоположное. Другая важная особенность дрейфового движения состоит в том, что как его скорость, так и его направление зависят от времени вращательной релаксации. Поскольку это время зависит в свою очередь от намагниченности, данный факт может представлять интерес с точки зрения сепарации частиц по величине их намагниченности.

Работа выполнена при поддержке МОН Украины, проект № 0116U002622.

## Unidirectional Transport of Ferromagnetic Particles in a Viscous Liquid Induced by the Magnus Force

S.I. Denisov, B.O. Pedchenko, M.O. Pavlyuk

*Sumy State University, 2, Rimsky Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine*

We study the unidirectional motion of spherical ferromagnetic particles suspended in a viscous liquid and subjected to the action of an external periodic force and a non-uniformly rotating magnetic field. In the case when the translational and rotational motions of particles are characterized by small Reynolds numbers, we propose a system of equations that describes their dynamics and that accounts for the influence of the Magnus force. Theoretical and numerical analysis of the steady-state solution of this system of equations is carried out, the average velocity of unidirectional (drift) motion of particles is calculated, and the dependence of the average velocity on the characteristics of particles, liquid, external force and magnetic field is studied.

**Keywords:** Ferromagnetic particle, Single-domain state, Viscous liquid, Translational and rotational motions, Magnus effect, Drift velocity.

**Односпрямований транспорт феромагнітних частинок у в'язкій рідині, породжений силою Магнуса**

С.І. Денисов, Б.О. Педченко, М.О. Павлюк

*Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007, Суми, Україна*

Вивчається односпрямований рух феромагнітних частинок сферичної форми, завислих у в'язкій рідині при наявності зовнішньої періодичної сили і магнітного поля, що неоднорідно обертається. Для опису динаміки таких частинок у випадку, коли їх поступальні та обертальні коливання характеризуються малими числами Рейнольдса, запропоновано систему рівнянь, що враховує вплив сили Магнуса. Проводиться теоретичний та чисельний аналіз стаціонарного розв'язку цієї системи рівнянь, розраховується середня швидкість односпрямованого (дрейфового) руху частинок і вивчається залежність середньої швидкості від характеристик частинок, рідини, силового і магнітного полів.

**Ключові слова:** Феромагнітна частинка, Однодомений стан, В'язка рідина, Поступальний та обертальний рухи, Ефект Магнуса, Швидкість дрейфу.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. R.D. Mehta, *Sport Aerodynamics* (Ed. by H. Nørstrud) (Wien: Springer: 2008).
2. J. Seifert, *Prog. Aerosp. Sci.* **55**, 17 (2012).
3. A. De Marco, S. Mancini, C. Pensa, G. Calise, F. De Luca, *Int. J. Rotating Mach.* **2016**, 3458750 (2016).
4. J.C. Forbes, *MNRAS* **453**, 1779 (2015).
5. *Vortices in Unconventional Superconductors and Superfluids* (Eds. By R.P. Huebener, N. Schopohl, G.E. Volovik) (Berlin: Springer-Verlag: 2006).
6. E.B. Sonin, *Dynamics of Quantised Vortices in Superfluids* (Cambridge: Cambridge University Press: 2016).
7. L.R. Thompson, P.C.E. Stamp, *Quantum Magnetism*, (Ed. by B. Barbara, et al.) (Dordrecht: Springer: 2008).
8. S.I. Rubinow, J.B. Keller, *J. Fluid Mech.* **11**, 447 (1961).
9. T.V. Lyutyty, S.I. Denisov, V.V. Reva, Yu.S. Bystrik, *Phys. Rev. E* **92**, 042312 (2015).
10. K.D. Usadel, C. Usadel, *J. Appl. Phys.* **118**, 234303 (2015).
11. M. Gitterman, *The Noisy Pendulum* (Singapore: World Scientific: 2008).
12. S.I. Denisov, B.O. Pedchenko, [arXiv:1611.06588](https://arxiv.org/abs/1611.06588) (cond-mat.soft).
13. A.P. Guimarães, *Principles of Nanomagnetism* (Berlin: Springer-Verlag: 2009).
14. T.V. Lyutyty, S.I. Denisov, A.Yu. Peletskyi, C. Binns, *Phys. Rev. B* **91**, 054425 (2015).
15. S.I. Denisov, T.V. Lyutyty, B.O. Pedchenko, O.M. Hryshko, *Phys. Rev. B* **94**, 024406 (2016).