

## Колебательные состояния примесных микрообразований на гексагональной подложке

А.С. Долгов, Ю.Л. Жабчик\*

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,  
ул. Чкалова, 17, 61070 Харьков, Украина

(Получено 25.04.2015; опубликовано online 20.10.2015)

Рассмотрены особенности колебательных состояний в примесных атомных образованиях на поверхности двумерной гексагональной структуры (графен и родственные нанобъекты). В рамках линейной теории в приближении ближайших соседей вводятся уравнения движения для атомов, образующих примесные сгустки, и выясняется структура спектра частот колебаний соответствующего образования. Предполагается, что набор равновесных позиций примесных атомов тождественен решетке графена (Тор-модель). Найдены точные выражения для мельчайших образований: зигзагообразная цепочка произвольной длины, «трехлучевая звезда», правильный шестиугольник – образ ячейки графена.

Показано, что набор частот колебаний прямо свидетельствует о форме образования и количестве атомов в сгустке. Применительно к цепочечным образованиям установлено, что спектр объекта, где количество атомов есть простое число, содержит уникальный набор частот, а спектр объектов кратной длины также содержит эти уровни. Обсуждаются возможности использования найденной информации для диагностики и управления свойствами поверхности.

**Ключевые слова:** Колебания атомов, Частотный спектр, Графен, Примесные атомы, Сгустки.

PACS number: 66.30.Pa

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Зависимость особенностей размещения осажденных примесных атомов на поверхности подложки от кристаллографических характеристик матрицы и ориентации поверхности относительно кристаллографических направлений не вызывает сомнений. Это обстоятельство определяет эффект эпитаксии [1, 2] и связанные с ним явления. С другой стороны, ожидается, что эффект ориентирующего влияния подложки проявляется на небольших удалениях от границы раздела сред, а для поверхностных покрытий немалой толщины рассматривается как второстепенный, поправочный, либо вовсе не представляющий интереса. Однако для такой специфической структуры, какой является моноатомное покрытие, геометрические и материальные характеристики поверхности подложки – обстоятельство первостепенного значения, в значительной мере предопределяющее структуру монослоя или, более того, саму возможность его существования.

Это соображение в полной мере относится к роли атомных примесей на графене [3, 4], играющем в этом случае роль подложки. Графен – это монослой с четкой микроструктурой, что заставляет предполагать особый характер размещения примесей. Стоит отметить, что недавние исследования ([5, 6] и др.) выявили существенное изменение важнейших характеристик наноструктуры даже при довольно низких уровнях примесного загрязнения.

Особенности относительного расположения атомов примесного слоя задается как ориентирующим действием подложки, так и взаимодействием упомянутых атомов между собой. В случае притяжения между этими атомами реализуется набор компактных сгустков, разделенных участками, практически свободными от примесного покрытия [7, 8]. Приме-

нительно к графену и иным гексагональным поверхностям основные характеристики возникающих конфигураций зависят от формы позиционирования атомов относительно атомов подложки (например [9]). Здесь мы будем предполагать один из трех возможных вариантов размещения, вероятно, наиболее показательный с точки зрения темы исследования (Тор-позиционирование), т.е. считать, что набор возможных позиций допирующих атомов – это проекция узлов матрицы на примыкающую плоскость.

Целью разработки является анализ характера колебаний внутри возникающих микрообразований.

### 2. СХЕМА АНАЛИЗА

Колебания атомов рассматриваемого слоя – это и предпосылка к реализации перебросов между соседними позициями, и, с другой стороны, дополнительный эффект самостоятельного значения. При невысоких уровнях заполнения примесного слоя и не слишком низких температурах он, как было показано [7, 8], представлен одиночными атомами и изолированными сгустками небольших размеров. Вследствие этого спектр частот в этой ситуации представлен дискретным набором уровней, принадлежащих, прежде всего, изолированным атомам и, затем, нескольким видам мелких сгустков. Взаимодействие каждого атома с его окружением в линейном приближении характеризуется двумя константами размерности частоты, которые обозначим: для взаимодействия с направляющей матрицей –  $\omega_0$ , а для межпримесного взаимодействия –  $\omega_1$ .

Рассматриваются только сдвиги, параллельные поверхности. Такие движения наиболее осязаемо связаны со специфической геометрией размещения атомов. Линейность последующих построений предполагает малость смещений и, с другой стороны,

\* [julia.zhabchyk@gmail.com](mailto:julia.zhabchyk@gmail.com)

позволяет записать законченные аналитические выражения. Основное внимание обращается на форму спектра колебаний. При этом в силу того, что спектр представлен, как правило, ограниченным или небольшим числом мод колебаний категория «плотность состояний» не вполне удобна для интерпретации и использования.

### 3. АТОМНЫЕ ЦЕПИ

Примесные атомы могут группироваться в после-

$$\frac{d^2x_{2n}}{dt^2} = -\omega_0^2x_{2n} + \omega_1^2 \left[ \frac{3}{4}(x_{2n-1} - 2x_{2n} + x_{2n+1}) + \frac{\sqrt{3}}{4}(y_{2n-1} - y_{2n+1}) \right], \quad (1)$$

$$\frac{d^2x_{2n+1}}{dt^2} = -\omega_0^2x_{2n+1} + \omega_1^2 \left[ \frac{3}{4}(x_{2n} - 2x_{2n+1} + x_{2n+2}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(y_{2n} - y_{2n+2}) \right], \quad (2)$$

$$\frac{d^2y_{2n}}{dt^2} = -\omega_0^2y_{2n} + \omega_1^2 \left[ \frac{1}{4}(y_{2n-1} - 2y_{2n} + y_{2n+1}) + \frac{\sqrt{3}}{4}(x_{2n-1} - x_{2n+1}) \right], \quad (3)$$

$$\frac{d^2y_{2n+1}}{dt^2} = -\omega_0^2y_{2n+1} + \omega_1^2 \left[ \frac{1}{4}(y_{2n} - 2y_{2n+1} + y_{2n+2}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x_{2n} - x_{2n+2}) \right]. \quad (4)$$

Здесь атомы пронумерованы в направлении оси цепи, совпадающей с осью «x», причем четные индексы приписаны тем атомам, равновесные позиции для которых сдвинуты относительно другой совокупности в направлении «y».

Уравнения (1-4) соответствуют неограниченной цепи. Однако, как установлено, набор характеристик бесконечной цепи включает в себя и свойства конечных структур как угодно малой протяженности. Соответствующие параметры точно определяются на основе решений уравнений вида (1-4) по простым правилам.

В соответствии с обычной техникой гармонического приближения динамики решетки [10, 11] уравнения (1-4) определяют характеристическое уравнение для частоты колебаний  $\omega$ , которое в данном случае представляет собой алгебраическое уравнение четвертой степени для  $\omega^2$ . Корни этого уравнения определяют два дискретных значения  $\omega = \omega_0$  и две ветви дисперсионного соотношения

$$\omega = \{\omega_0^2 + 2\omega_1^2 \pm \omega_1^2 \cos s\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

где отбор значений  $s$  определяется правилом

$$Ns = \pi l, \quad l = 1, \dots, N - 1, \quad (6)$$

$N$  – число атомов в цепи.

Соотношение (6) не тождественно циклическим граничным условиям и соответствует ограниченной цепи со свободными концами. Оно применимо к любым значениям  $N$ , формально даже и к варианту  $N = 1$  (одиночный атом).

Случаю  $N = 2$  соответствует частота

$$\omega = (\omega_0^2 + 2\omega_1^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

характеризующая противофазное движение атомов пары.

Цепочка из трех атомов колеблется с частотами

довательности, отвечающие зигзагообразным атомным цепям графена, ориентированным по нормали к сторонам гексагонов. В соответствии с оговоренными условиями количество атомов в отдельной цепочке невелико, в силу чего эти криволинейно-цепочечные образования также принадлежат к числу мельчайших.

Уравнения движения для атомов, образующих правильные зигзагообразные цепи, таковы

$$\omega = \left( \omega_0^2 + \frac{3}{2}\omega_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \omega_0^2 + \frac{5}{2}\omega_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

где первая соответствует сгибаниям – разгибаниям «подковы», а вторая движениям наподобие качаний около центральной точки.

Значение  $N = 4$  задает набор частот

$$[\omega_0^2 + 2\omega_1^2]^{\frac{1}{2}}, \left[ \omega_0^2 + \omega_1^2 \left( 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Выражения (7-9) определяют частоты, значения квадратов которых попарно симметричны относительно среднего уровня (7), что дает определенную асимметрию спектра собственных частот со сдвигом в сторону понижения. Названное обстоятельство распространяется на цепочки произвольной длины.

Можно также отметить, что каждое очередное значение  $N$  соответствует расширению всего реализуемого диапазона частот (5) в обе стороны с приближением к граничным значениям

$$\{\omega_0^2 + 2\omega_1^2 \pm \omega_1^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Любое простое число  $N$  формирует уникальный набор частот, не имеющих совпадений с другими случаями, а цепочки с числом элементов, кратным каким-то иным, содержат все частоты, принадлежащие указанным более коротким сгусткам.

### 4. МЕЛЬЧАЙШИЕ ПЛОСКОСТНЫЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Наименьшим, т.е. наиболее вероятным нецепочечным образованием является комплекс из четырех атомов, где три образуют первое координационное кольцо вокруг четвертого – центрального («трехлучевая звезда»).

При этом три атома образуют цепочку того вида, что охватывается общими уравнениями, приведенными

выше. Модифицированные очевидным образом уравнения для упомянутых трех атомов дополняются двумя равенствами для дополняющего четвертого

$$\frac{d^2 x_4}{dt^2} = -\omega_0^2 x_4,$$

$$\frac{d^2 y_4}{dt^2} = -\omega_0^2 y_4 - \omega_1^2 (y_4 - y_2).$$

(Центральному элементу звезды приписан номер «2»).

Отыскание гармонических решений возникающей системы восьми уравнений приводит к алгебраическому уравнению восьмой степени для значений  $\omega^2$ . Высокая симметрия рассматриваемой структуры подсказывает свойства собственных функций динамического объекта.

Помимо тривиальных смещений объекта как целого с частотой  $\omega_0$  возможны также индивидуальные колебания внешних атомов без изменения удаления от центра с той же частотой. Также очевидна физическая состоятельность колебаний симметричных относительно центра, т.е. расширений – сжатий звезды при сохранении положения центра. В этих условиях каждый атом движется в поле дополнительного неподвижного центра, взаимодействие с которым здесь задается параметром  $\omega_1^2$ . Таким образом, частота таких колебаний задается выражением

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2. \quad (10)$$

Кроме того, ожидаются колебания, отвечающие зеркальной симметрии относительно осей, соединяющих центр с каждым из периферийных атомов. Соответствующие формальные процедуры приводят к выражению

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{5}{2} \omega_1^2. \quad (11)$$

## 5. КОЛЬЦО МИНИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ

Связывание примесных атомов со всеми атомами выделенного гексагона создает такую же шестиугольную структуру, которая в отсутствие в близком соседстве других атомов представляет собой кольцеобразное образование. Интерес к этой конфигурации связан не только с тем, что шестиугольник – основной элемент подстилающей матрицы, но и ввиду того, что особая компактность этого размещения в условиях притяжения задает определенный приоритет этого образования для значений  $\nu < 1$ .

Система линеаризованных уравнений движения для атомов кольца такова (последовательная нумерация по часовой стрелке)

$$\left. \begin{aligned} px_1 + \frac{3}{4}(x_2 - x_1) + \frac{\sqrt{3}}{4}(y_2 - y_1) &= 0 \\ px_2 + \frac{3}{4}(x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\sqrt{3}}{4}(y_1 - y_3) &= 0 \\ px_3 - \frac{3}{4}(x_3 - x_2) + \frac{\sqrt{3}}{4}(y_3 - y_2) &= 0 \\ py_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}(x_2 - x_1) + \frac{1}{4}(y_2 - y_1) + (y_6 - y_1) &= 0 \\ py_2 + \frac{1}{4}(y_1 - 2y_2 + y_3) + \frac{\sqrt{3}}{4}(x_1 - x_3) &= 0 \\ py_3 - \frac{\sqrt{3}}{4}(x_3 - x_2) - \frac{1}{4}(y_3 - y_2) + (y_4 - y_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Последующие шесть уравнений для узлов с номерами 4, 5, 6 получаются из приведенных уравнений (12) переобозначением индексов и инверсией знака  $y$ .

Принято обозначение

$$p \equiv \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_1^2}.$$

Реализуются несколько типов движений, отвечающим определенным значениям частоты. Как и прежде, допускается колебательное движение с составляющими по  $x$  и  $y$  без изменения относительного размещения атомов кольца. При этом  $p = 0$ , т.е.  $\omega = \omega_0$ . Вариант  $y_1 = y_6$ ,  $y_3 = y_4$  соответствует обособлению противостоящих трехатомных фрагментов, что возвращает рассмотрение к свойствам трехатомной цепочки и соответствующим частотам (первое значение формулы (8)).

Разумеется, эти же соображения относятся и к разделению еще в двух направлениях, соответствующих равновесному удалению в других парах противостоящих атомов.

$$\text{Версия } x_1 = x_6, \quad x_3 = x_4 = -x_1, \quad x_2 = x_5 = 0,$$

$$y_1 = y_3 = -y_6 = -y_4, \quad y_5 = -y_2$$

определяет зеркальную симметрию относительно двух взаимноперпендикулярных осей – проходящей через атомы «2», «5» и через середины отрезков «1-6», «3-4». Этот тип движений также трехкратно вырожден и соответствует значению  $p = 5/2$ . Кроме того, обсуждаемый вариант содержит в себе специальный случай, отвечающий соответствию  $x_1 = -\sqrt{3}y_1$ , что задает движение атомов только в центральном направлении, т.е. соответствует однородным растяжениям – сжатиям всего гексагона. При этом  $p = 1$ .

Уравнения (12) удовлетворяются также в условиях антисимметрии относительно оси, проведенной через противостоящие вершины шестиугольника при сохранении зеркальности для другой оси. В терминах относительных смещений ( $y_{21} \equiv y_2 - y_1$  и т.д.) этот вариант отвечает набору соответствий

$$x_{43} = x_{61} = 0, \quad x_{56} = x_{21} = -x_{32} = -x_{45},$$

$$y_{32} = y_{21} = -y_{45} = -y_{56}, \quad y_{61} = -y_{43}.$$

Приведенная совокупность условий формально включает в себя и случай движения кольца как целого, и вариант физического расчленения объекта, указанные выше.

Ранее не встречавшийся тип движения соответствует значению  $p = 3$ , что есть наибольшее значение для рассматриваемой структуры, совпадающее с верхней границей диапазона состояний цепочечного объекта, т.е. превосходящее эти характеристики цепочечных образований конечной длины.

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

При невысоких уровнях плотности примесной компоненты (эта ситуация должна считаться основной, если речь идет именно о «примеси») возникает разреженное примесное покрытие, составленное из одиночных атомов и мелких (как правило) ступков.

Взаимодействие между атомами слоя создает элементы упорядоченности, представленные соотношением количеств образований различных размеров и форм и геометрическими характеристиками мельчайших кластеров. Эти сгустки могут появляться при разных формах взаимовлияния соседствующих атомов, но наиболее отчетливо эта тенденция обозначена в той ситуации, когда близкое соседство снижает подвижность атомов.

Дополнительное усложнение общей картины распределения атомов в монослое связано с тем, что фактор, определяющий масштаб взаимодействия, в соответствии с законами статистической механики должен быть представлен в виде  $\exp\left(\frac{V}{k_B T}\right)$ , где  $V$  – изменение энергии вследствие взаимодействия, т.е. явно зависит от температуры.

Варьирование температуры ведет к количественным и даже качественным перестройкам в пределах слоя. Следует, однако, обратить внимание на то, что данное утверждение относится только к состоянию равновесия или адиабатически медленным изменениям внешних условий. В переходных процессах при достаточно быстром изменении температуры изменение характеристик распределения будет отставать от изменения температуры. Наиболее явственно это обстоятельство будет проявляться в области пониженных температур, где абсолютная релаксационная подвижность низка. Например, при стремительном охлаждении можно «заморозить» распределения, характерные для высоких температур. Также нет оснований полагать, что составляющие цикла охлаждения – нагрев будут идентичны по соответствиям определяющих характеристик температуре. Будет наблюдаться температурный эффект, напоминающий гистерезис.

Таким образом, даже при фиксированном уровне поверхностного загрязнения особенности спектра колебаний примесной компоненты допускают довольно значительное варьирование вследствие перераспределения парциальных вкладов различных форм микроразмещений при изменении температуры. Тем самым температурное воздействие есть инструмент перестроек особенностей поверхностного покрытия и соответствующего преобразования эффективности поглощения как монохроматического, так широкополосного инфракрасного излучения. И, с другой стороны, информация о спектре – есть средство диагностики распределения примесных конфигураций на поверхности.

Следствием группировки атомов примесного слоя является появление колебательных состояний, связанных со всевозможными плотными изолированными образованиями. Частотные характеристики колебательных процессов дают вклад в универсальные характеристики структуры, причем в силу того, что рассматриваемая подложка – это всего лишь один атомный слой, вклады основного и примесного слоев сопоставимы, что должно трактоваться как предпосылка к выявлению весьма детальной информации об особенностях микрораспределений.

Преобладание мелких скоплений задает весьма ограниченный набор значений частоты. Для объектов, включающих изолированные образования с числом атомов от единицы до четырех, полный набор значений квадратов частот согласно (7-11) таков

$$\omega^2 = \omega_0^2 + (0,1)\omega_1^2, \quad (13)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_1^2 + \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\omega_1^2. \quad (14)$$

При этом симметричные относительно среднего значения

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_1^2$$

частотные уровни (14) есть принадлежность цепочечных образований, а уровни  $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2$  появятся только в трехлучевой звезде и правильном шестиатомном кольце.

Например, наличие частоты

$$\omega = \left(\omega_0^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\omega_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

прямо свидетельствует о цепочке, число атомов в которой кратно четырем. Если же указанное значение фиксируется как максимальная частота, то, значит, более длинных, нежели четырехзвенное, цепей практически не существует.

Особо следует отметить частоту

$$\omega = (\omega_0^2 + 3\omega_1^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Это значение – метка правильных колец.

«Яркость» того или иного уровня частоты, т.е. степень повторяемости фиксации этого значения пропорциональна сумме вероятностей конфигураций, определяющих данную частоту, что включает набор цепочек кратных протяженностей и статистический вес (кратность вырождения) конфигураций.

В целом: спектр частот – это развернутая первичная информация о формах микрообразований и особенностях их движения.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемая разработка основывается на феноменологической схеме, содержащей допущения довольно общего характера: соответствие набора возможных позиций примесных атомов геометрии гексагональной решетки, линейная форма взаимодействия с матрицей, отсутствие стоков и источников, и некоторых дополнительных, задающих варианты обсуждаемого объекта. Эти предположения достаточноны для предсказаний качественного характера.

Основные послышки допускают значительное расширение и серьезную детализацию, а приемы анализа при определенной модификации могут быть распространены на иные структуры, смежные с предметом изучения в данной статье.

## Oscillatory States of Impurity Micro-formations on the Hexagonal Substrate

A.S. Dolgov, Yu.L. Zhabchyk

*Zhukovsky National Airspace University "KhAI", 17, Chkalova Str., 61070 Kharkov, Ukraine*

The features of the oscillatory states in the impurity atomic formations on the surface of a two-dimensional hexagonal structure (graphene and related nano-objects) are considered. Within the framework of the linear theory in the approximation of the nearest neighbors, the equations of motion for the atoms forming the impurity bunch are introduced, and the structure of the spectrum of oscillation frequencies of an appropriate formation is found out. It is assumed that the set of equilibrium positions of impurity atoms is identical with the lattice of graphene (Top-model). Exact expressions for the smallest formations, such as the zigzag chain of an arbitrary length, "three-beam star", regular hexagon, which is the image of graphene cell, are found out.

It is shown that the set of oscillatory frequencies directly indicates the form of formation and the number of atoms in the bunch. With regard to the chain-like formations, it is found that the spectrum of the object, wherein the number of atoms is prime number, contains a unique set of frequencies; and the spectrum of objects with multiple lengths also contains these levels. The possibilities of using the found information in the diagnosis and management of surface properties are discussed.

**Keywords:** Atomic oscillation, Frequency spectrum, Graphene, Impurity atoms, Bunches.

## Коливальні стани домішкових мікроутворень на гексагональній підкладці

А.С. Долгов, Ю.Л. Жабчик

*Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «ХАІ»,  
вул. Чкалова 17, 61070 Харків, Україна*

Розглянуті особливості коливальних станів в домішкових атомних утвореннях на поверхні двовимірної гексагональної структури (графен і споріднені нанооб'єкти). В рамках лінійної теорії в наближенні найближчих сусідів вводяться рівняння руху для атомів, що утворюють домішкові згустки, і з'ясовується структура спектру частот коливань відповідного утворення. Передбачається, що набір рівноважних позицій домішкових атомів тотожний решітці графену (Тор-модель). Знайдено точні вирази для найдрібніших утворень: зигзагоподібний ланцюжок довільної довжини, «трипроменева зірка», правильний шестикутник - образ комірки графена.

Показано, що набір частот коливань прямо свідчить про форму утворення і кількість атомів в згустку. Стосовно ланцюжкових утворень встановлено, що спектр об'єкта, де кількість атомів є простим числом, містить унікальний набір частот, а спектр об'єктів кратної довжини також містить ці рівні. Обговорюються можливості використання знайденої інформації для діагностики та керування властивостями поверхні.

**Ключові слова:** Коливання атомів, Частотний спектр, Графен, Домішкові атоми, Згустки.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Л.С. Палатник, И.И. Папилов, *Эпитаксиальные пленки* (Москва: Наука: 1971) (L.S. Palatnik, I.I. Papirov, *Epitaksial'nyye plenki* (Moskva: Nauka: 1971)).
2. В.Г. Дубровский, *Теория формирования эпитаксиальных наноструктур* (Москва: Физматлит: 2009) (V.G. Dubrovskiy, *Teoriya formirovaniya epitaksial'nykh nanostruktur* (Moskva: Fizmatlit: 2009)).
3. A.K. Geim, K.S. Novoselov, *Nat. Mater.* **6** No 3, 183 (2007).
4. А.В. Елецкий, И.М. Искандарова, А.А. Книжник, Д.Н. Красиков, *УФН* **181** № 3, 233 (2011) (A.V. Yeletskiy, I.M. Iskandarova, A.A. Knizhnik, D.N. Krasikov, *Phys. Usp.* **54**, 227 (2011)).
5. B. Huang, Z.Y. Li, Z.R. Liu, G. Zhou, S.G. Hao, J. Wu, B.L. Gu, W.H. Duan, *J. Phys. Chem. C* **112**, 13442 (2008).
6. J.-H. Chen, C. Jang, E.D. Williams, M.S. Fuhrer, M. Ishigami, *Nat. Phys.* **4**, 377 (2008).
7. А.С. Долгов, Н.В. Стеценко, *ФИП* **7** № 3, 24 (2009) (A.S. Dolgov, N.V. Stetsenko, *Phys. Serf. Eng.* **7** No 3, 24 (2009)).
8. А.С. Долгов, Н.В. Стеценко, *Поверхность* **1**, 108 (2012) (A.S. Dolgov, N.V. Stetsenko, *Poverkhnost'* **1**, 108 (2012)).
9. А.С. Долгов, Ю.Л. Жабчик, *Ж. нано-електрон. физ.* **5** № 3, 03039 (2013) (A.S. Dolgov, Yu.L. Zhabchyk, *J. Nano-Electron. Phys.* **5** No 3, 03039 (2013)).
10. A.A. Maradudin, E.W. Montroll, G.H. Weiss, *Theory of Lattice Dynamics in the Harmonic Approximation* (New York: Solid State Physics Academic Press: 1963).
11. А.М. Косевич, *Основы механики кристаллической решетки* (Москва: Наука: 1972) (A.M. Kosevich, *Osnovy mekhaniki kristallicheskoj reshetki* (Moskva: Nauka: 1972)).